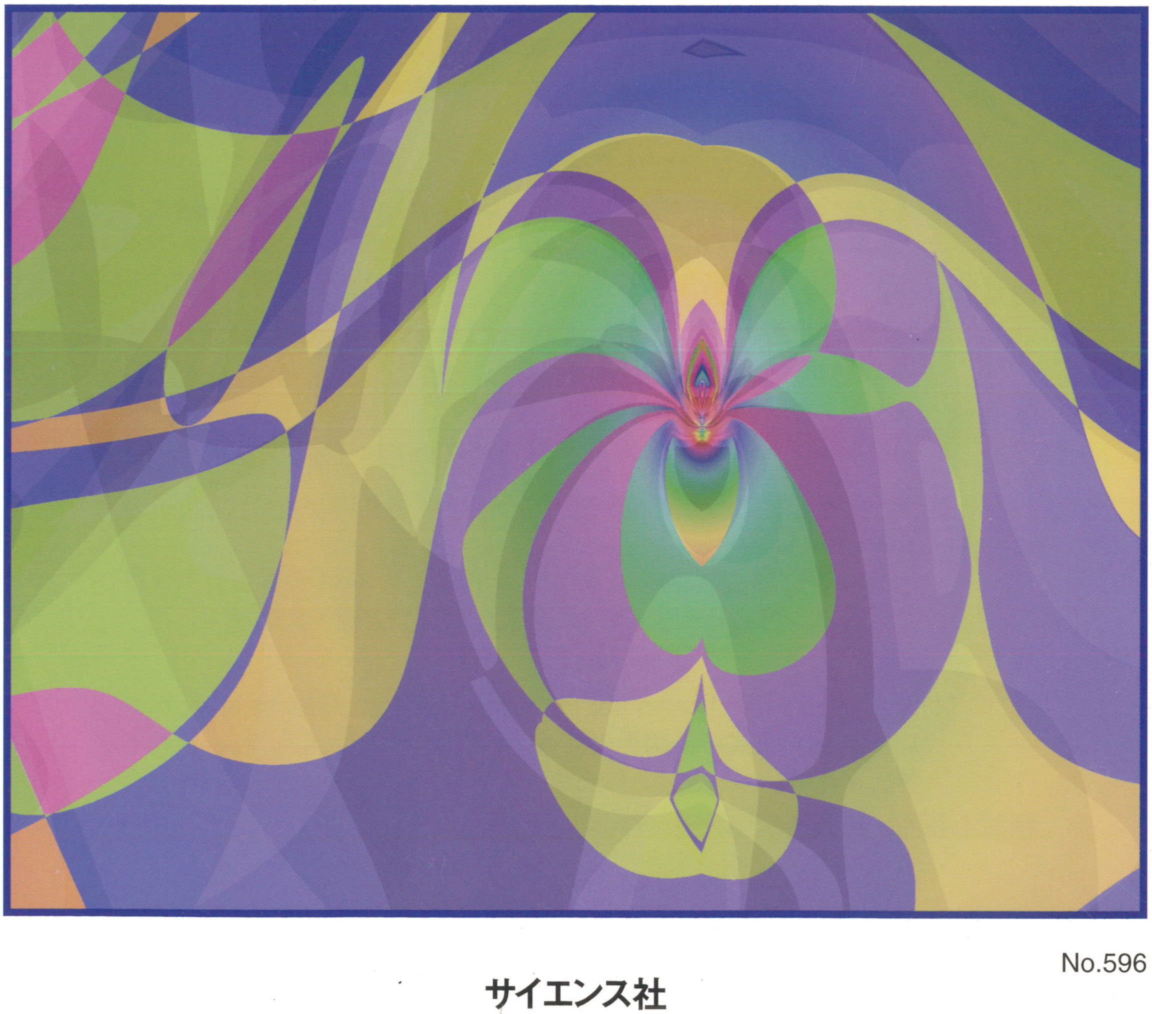
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年2月1日発行　第51巻2号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

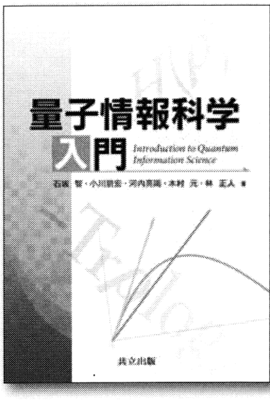
2
2013

特集《量子化》の発想
可積分系から幾何学まで



No.596

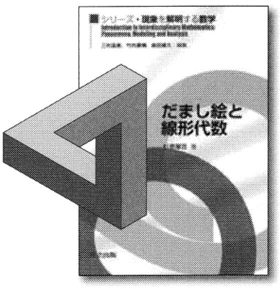
サイエンス社



量子情報科学入門

石坂　智・小川朋宏・河内亮周・木村　元・林　正人著　「量子情報科学」は，物理学，情報科学，数学などの分野を巻き込み発展している最先端の科学分野である。本書は，この新しい研究分野の大学教員が集まり量子情報科学の基礎から解説したわかりやすいテキストである。量子力学や量子情報科学に対する前提知識を必要とせず，大学１，２回生（全学教育）レベルの線形代数，微積分，初等確率のみの予備知識を仮定して，学部学生でも十分読めるよう意図して執筆している。

【主要目次】 量子情報科学への招待／量子ビット系の量子力学／量子計算基礎／量子アルゴリズム／量子情報理論の基礎／量子系における情報量／量子エンタングルメント／量子通信路符号化／量子誤り訂正と量子暗号／付録Ａ：線形代数の基礎／付録Ｂ：演習問題解答／参考文献／索引…………A5判・376頁・定価3,990円



だまし絵と線形代数

【シリーズ･現象を解明する数学】三村昌泰・竹内康博・森田善久編集／杉原厚吉著　「だまし絵」とは，それを見た人が立体感をもつと同時にそんな立体はあり得ないと感じる絵のことである。本書は，このだまし絵を見たときに起こる錯覚という現象を数理の力で探ろうとするものである。本書で使う数学は，線形代数の中でも最も基本的な行列で表される線形変換と，連立一次方程式である。そんな単純な数学によって，錯覚という一見複雑な認識現象がどのように定式化でき，探究できるのかを味わっていただきたい。……………………A5判・150頁・定価2,730円

日本応用数理学会 監修

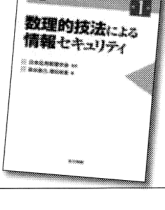
シリーズ 応用数理

日本応用数理学会が蓄積してきた知的財産を，数理的な取り扱いを行っている技術者・研究者，またそれらを学んでいる人々に提供することを目的としたシリーズ。応用数理の重要性を意識しながら，様々な分野の応用数理のテーマを，その分野の第一人者がわかりやすく紹介。【各巻：A5判・224～280頁】

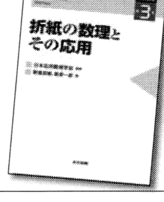
❶数理的技法による情報セキュリティ
萩谷昌己・塚田恭章編…………定価3,675円

❷公開鍵暗号の数理
森山大輔・西巻　陵・岡本龍明著　定価3,675円

❸折紙の数理とその応用
野島武敏・萩原一郎編…………定価4,725円







金田行雄・笹井理生 監修

計算科学講座 全10巻

日進月歩の急速なコンピュータ技術の進歩により，シミュレーションやデータ解析など，コンピュータを使って研究することのできる対象は大きく拡がりつつある。本講座は計算科学の基盤分野と応用分野の密接な連携を軸に，計算科学を体系的に解説し，その最前線を展望。【各巻：A5判・260～390頁】

❸統計・多変量解析とソフトコンピューティング 超多自由度系解析を目指して
古橋　武編………………定価4,620円

❺乱流の計算科学
乱流解明のツールとしての大規模数値シミュレーション
金田行雄編………………定価3,990円

❻分子システムの計算科学
電子と原子の織り成す多体系のシミュレーション
笹井理生編………………定価4,620円

❿超多自由度系の新しい科学
笹井理生編………………定価4,200円

〒112-8700 東京都文京区小日向 4-6-19
TEL．03-3947-2511／FAX．03-3947-2539
共立出版
http://www.kyoritsu-pub.co.jp/
共立ニュースメール会員募集中　（税込価格）

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 596 February 2013

《量子化》の発想

可積分系から幾何学まで

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7〜2009年/11 省略
2009年/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013年/1 表現論の世界

数理科学臨時別冊一覧

12年/1 現象から方程式を創り出す
12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式
12年/6 CP対称性の破れ
12年/7 弦の場の理論
12年/9 超弦理論の応用
12年/10 複素多様体論講義
12年/11 幾何学の量子化
12年/12 量子力学から超対称性へ
13年/1 行列解析ノート

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

February 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 596

特集／《量子化》の発想

心の友よ

白石　潤一

ここ数年正月の休みには決まって白川郷を訪れることにしている．合掌造りの建物はみな雪に埋もれている．私の息子たちはもちろん冷たい雪の中へどんどん入って行く．雪遊びに満足した後に家族全員で囲炉裏の側へ座り冷えきった手足を暖める．薄暗い合掌造りの中で赤々と燃える薪をじっと眺め，つくづく不思議なものだと私は考える．

子供の頃私は針金や銅線をガスの炎で赤熱させるのがたまらなく好きであった．今も似たような感覚を持っていて，もし刀鍛冶が日本刀を鍛錬する場面に居合わすことができればどれほど幸せかと想像する．製鉄工場の高炉の巨大さとそれに矛盾するような精妙な温度品質管理の兼ね合いについて新日鐵に勤務する友人から説明を受けたときも感動した．

我々が炎の赤熱を量子化によって説明できるようになったのは前世紀の初めのことである．量子力学の体系がいかに非日常的であろうとも，確かにそれによって極微の世界が記述されていることを，私は囲炉裏のふちに座って体の芯で感じ取りたいのだ．

本号は量子化についての特集であるが，量子化という表題の下に特定の概念ないし作業仮説に焦点を当てようという意図はない．可積分系の考え方がドリンフェルトと神保を量子群の発見へと導いたことは確かであるが，本号に集められた記事はその事情について向けられた解説ではない．可積分系やヘッケ環に関連した話題に興味を持たれる読者は，ザブロージン氏（武部氏訳）と野海氏の記事から読まれたい．量子群の研究については標準基底の幾何学に関する木村氏の論説に概観されている．作用素環の立場から見た量子群の風景については戸松氏のコラムをご覧頂きたい．量子コホモロジーと量子可積分系との関連については以下に述べる．

2次超曲面の射影幾何学やグラスマン多様体のシューベルト胞体などは前々世紀から続く数学であり，そこには長い歴史と数学固有の考え方がある．ミラー対称性や量子コホモロジーといった弦理論の考え方がそれとどこか深い所で呼応していることを，慧眼なる読者諸兄は髙木氏と池田氏の記事に読み取られることであろう．歴史的経緯についてはキリロフ氏（前野氏訳）の記事に詳しい．トポロジーで重要なチャーン類が，シューベルト類を通してシューア関数という対称多項式と結びつけられることを念頭におきながら野海氏のマクドナルド多項式の解説を読んでみられたらどうであろう．また，導来圏や偏屈層といった数学がどのように用いられているのかを具体的に知るために量子群の標準基底について論じた木村氏の記事やカラビヤウ3多様体についての髙木氏の論説を参考にされるというのも良いのではないだろうか．

私が最近家族と訪れた城は，熊本城，それから白鷺城の名を持つ優美な姫路城．私の故郷は神戸なので子供の頃姫路城にはよく遊びにいった．熊本城は重厚な要塞としての美を備えている．熊本

を旅したとき，端午の節句に大変立派な幟を拵えて子供の成長を祝う風景を見た．勇ましく大きく立ち並ぶ幟を見て彼の地の伝統を知る思いがした．

城には我々家族のような観光客を楽しませてくれる仕掛けがたくさんある．刀，槍，弓などを持った武士や忍者の出で立ちのガイドたちが子供たちを出迎えてくれる．銃口を差し出すための小穴が丸三角四角の幾何学的な意匠で壁に配列されているので，ついそこへ行って外を覗いてみたくなる．天守閣からの景色は素晴らしい．妻は歴史に浸って大いに満足そうである．城はとても一日では遊び尽せない．

姫路城にはお菊井戸というのがある．一枚二枚…三枚四枚…五枚六枚…七枚八枚九枚．九枚しかない．家宝の皿が十枚そろわないのがよほど恨めしく，お菊さんの幽霊は毎夜その井戸に現れた．よほどの数学者でもないかぎり，数の辻褄が合わないぐらいでそれほど悔しがりはしないのだが．

夏の京都，いつものようにフェイギンと議論をしていたとき，何かの拍子にドリンフェルトのザスタバに突きあたり，自然ザスタバとはそもそも何を意味するかという話になった．彼は初め字義的にザスタバは最前線で兵隊が詰めているような場所つまり砦を意味するのだと言っていたが，数日後その言葉を母国語に持つ者からそれは単に旗を意味するのだということを教えられたとのこと．

旗という言葉には戦いに関する連想が働く．武田信玄の風林火山などは最も直接で強烈な印象を我々に与えるし，私の息子たちの節句の兜にも，長男のほうには刀と弓が，次男のほうには可愛い幟がついている．旗には万人の気持ちが込められている．

我々はある種の幾何学的な対象を相当な愛着を持って旗と呼んできた．この旗には万人の数学者の気持ちが込められている．量子コホモロジーでは旗の中にリーマン球面を入れその遊ばせ方全体の成す幾何学を研究する．旗について興味を持たれる読者は，池田氏の書かれたシューベルト・カルキュラスについての論説から読み進んで頂ければと思う．その後，キリロフ氏の量子コホモロジーの解説やフィンケルベルグ氏（柳田氏訳）の記事へと読み進めて頂ければ，最近の数え上げ幾何や幾何学的表現論の進展の一側面を概観することとなるだろう．

複雑な歴史も文学になっていれば私でもどこか親しみを感じることができるし，故郷に伝わる話には自然とさらに深い思い入れがある．須磨寺は源氏平氏一の谷の合戦のゆかりの地であり，そこには平敦盛の碑がある．平家物語の「あはれ弓矢取る身ほど口惜しかりけるものはなし」と心に大変な葛藤を抱いた熊谷直実と，「ただとくとく首を取れ」と言う若く美しい敦盛の対峙は忘れがたい．

矢を入れる道具を箙と言うらしい．幾何学的表現論では箙が大変に活躍する．箙の表現論や中島箙多様体と量子群の標準基底については木村氏の記事を読まれたい．またフィンケルベルグ氏の解説も参照されればさらに良いだろう．この種の数え上げ幾何は，驚くべきことに量子コホモロジーや量子戸田ハミルトニアン，マクドナルド差分作用素の固有関数と密接な関係を持っている．これはザブロージン氏の言う可積分系特有の関係と響き合うだろう．

本号に集められた記事がそれぞれ筆者の到達した独自の高い見地から書かれていることに私は尊敬と感謝の念を禁じ得ない．平易な解説を非常に限られた紙数の中で成し遂げられた著者の方々に，そして，日本語への翻訳の労を取って下さった方々に対してこの場を借りて厚くお礼を申し上げる．また，この特集の企画の一員として私を迎え入れ，困難ではあるが実り多い作業を分かち合った編集部の方々にも感謝したい．

飛鳥の里は聖徳太子ゆかりの地である．家族と私はみなここが好きである．古墳と妙な形をした奇石にはなんともいえない懐かしさと素朴な力強さを感じる．甘樫の岡に登れば古の都が眼下に広がる．

あのとき太子にはどのような未来が見えていたのだろう．

（しらいし・じゅんいち，東京大学大学院数理科学研究科）

可積分系における広田方程式と Bethe Ansatz



A. Zabrodin
(訳／武 部　尚 志)

1. 序

この小文では古典物理および量子物理における可積分系の関係について述べるが，ここで述べるのは伝統的な量子力学の対応原理の枠から外に踏み出した非自明な関係である．よく知られているように可積分系には古典系と量子系という 2 つの種類があり，その解き方も違えば，問題の定式化そのものからして本質的に異なっている．前者の古典系においては運動方程式を解かなくてはいけないが，後者の量子系では作用素（ハミルトニアン）を対角化しなくてはならない．大部分の古典可積分系は可積分性を保ったまま対応原理によって量子化できるし，量子系は少なくとも原理的には古典極限を取れる．

それだけではなく，古典的可積分系と量子的可積分系の間にはその他にももっと深い，普通の対応原理からは決して導かれない可積分系特有の関係もある．正確に言うと，古典的方程式が量子的問題に $\hbar \neq 0$ の場合でさえ正確にそのままの関係式として含まれていることが分かってきた．また逆に，特別な量子的可積分構造が純粋に古典的な方程式の解に現れてくることもある．この驚くべき，そしてまだ完全には理解されていない現象にはいくつかの側面がある．ここではその一つの側面にだけふれることにしよう．それは量子転送行列*1)（T 作用素）と古典的 τ 関数の同一視である．

2. 古典理論の可積分系と広田方程式

ある大きなクラス非線形偏微分方程式には隠れた対称性があり，その対称性のために方程式が可積分になっている．このような方程式の例としては，次のような 1 + 1 次元の古典的場の理論の可積分模型がよく知られている：Sine-Gordon 模型，主カイラル場，σ 模型，2 次元戸田格子．また，Korteweg-de Vries 方程式，Benjamin-Ono 方程式，Kadomtsev-Petviashvili 方程式，非線形 Schrödinger 方程式等々の数多くの非相対論的模型もこのクラスに含まれる．これらの方程式には一般にソリトン型の厳密解があるので，ソリトン方程式と呼ばれることもある．可積分であれば，つまり無限個の対合的な*2) 運動の積分があれば，その運動の積分の一つ一つが時間発展を生成するので，一つの方程式に無限個の方程式からなる**階層**（hierarchy）が結びつくことになる．

古典可積分系理論の中心にあるのは，τ 関数と呼ばれるものである．これは可積分方程式の対合的な無限個のハミルトニアンで生成される全階層の一般解を一気に与えてしまう，という

*1)（専門家のための訳注）本訳文では簡単のため「量子転送行列」と直訳したが，正確には「1 次元量子スピン鎖における転送行列」のことで，Klümper らによる「量子転送行列」ではない．

*2)（訳注）Poisson 括弧積 $\{\,,\,\}$ に関して可換ということ．

基本的な役割を果たす．τ 関数は無限個の変数 $\mathsf{t} = \{t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots\}$ に依存し，無限個の方程式を満たす．この無限個の方程式は

$$\begin{aligned}&(z_2 - z_3)\,\tau(\mathsf{t}+[z_1])\tau(\mathsf{t}+[z_2]+[z_3])\\ &+\ (z_3 - z_1)\,\tau(\mathsf{t}+[z_2])\tau(\mathsf{t}+[z_1]+[z_3])\\ &+\ (z_1 - z_2)\,\tau(\mathsf{t}+[z_3])\tau(\mathsf{t}+[z_1]+[z_2])\\ &=\ 0. \qquad (1)\end{aligned}$$

のような一つの関数関係式にまとめられる．これは広田方程式と呼ばれるものである．ここで z_1, z_2, z_3 は任意のパラメーターで，短くするために $\mathsf{t}+[z] \equiv \{t_0+1, t_1+z, t_2+\frac{1}{2}z^2, t_3+\frac{1}{3}z^3, \ldots\}$ という記号を使った．z_i の巾に展開すれば，無限個の微分方程式が得られ，それが階層を作っている（今の場合は，変形 Kadomtsev-Petviashvili（mKP）階層）．t_i という変数と共に，連続的な「添え字」z で番号付けされた変数 u_z も使われる．これは t_i と

$$t_0 = u_0, \quad t_k = \frac{1}{k}\sum_z u_z z^k, \quad k \geq 1 \quad (2)$$

という関係で結ばれているものである．変数 t_i と u_z は同じ方程式系に互いに相補的な記述を与え，一方から他方への変換はある意味でフーリエ変換に似ている．

変数 u_z を使えば，関係式 (1) は 3 次元格子上の，3 組の変数 $u_{z_i} = u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ に関する差分方程式の形になる：

$$\begin{aligned}&(z_2 - z_3)\,\tau(u_1, u_2+1, u_3+1)\tau(u_1+1, u_2, u_3)\\ &+\ (z_3 - z_1)\,\tau(u_1+1, u_2, u_3+1)\tau(u_1, u_2+1, u_3)\\ &+\ (z_1 - z_2)\,\tau(u_1+1, u_2+1, u_3)\tau(u_1, u_2, u_3+1)\\ &=\ 0. \qquad (3)\end{aligned}$$

パラメーター z_i は格子定数の役割を果たす．同様の方程式は 4 つ以上の変数 u_i について書くこともできるが，それらは 3 組の変数について書かれた方程式 (3) から従うことが分かる．(1) と (3) の形の広田方程式は連続ソリトン方程式と離散ソリトン方程式の深い相互関係を反映していることに注意してほしい．これらは同じ階層に属し，独立変数の変換 (2) で階層全体が互いに移り合う．

「自然界では」τ 関数（またはその対数）はしばしば分配関数，様々な相関関数，それらの母関数，結合定数の関数としての有効作用などとして現れる．

τ 関数の概念が重要なのは，多様な非線形可積分偏微分方程式の集まりすべてが τ 関数についての一つの普遍的な差分方程式 (3) に帰着される，という点にもある．この方程式は，それと同値な (1) と同様に広田方程式と呼ばれ，古典可積分系で（そして，すぐ後で見るように，量子系でも）基本的な役割を果たす．すべての知られている可積分方程式はこの方程式から種々の簡単な操作の結果得られる．但し，簡単とは言っても技術的には微妙なこともある．例えば，連続極限を取って（z_i の巾に展開し，変数 t_k に移って），種々の簡約条件を課し，従属変数と独立変数を選び，といった操作である．

広田方程式と，それに密接に結びついた Y-system と呼ばれる方程式は思いもよらない文脈でも現れる．最近では，$\mathcal{N} = 4$ 超対称 4 次元 Yang-Mills 理論の planar 極限でのオペレーターの異常次元のスペクトルの決定にも利用された．

3. 量子可積分系と Bethe Ansatz

多自由度量子模型の最初の厳密解の発見は 1931 年で，H. Bethe による Heisenberg スピン鎖模型の

$$H = J\sum_{n=1}^{L}\left(\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y\sigma_{n+1}^y + \sigma_n^z\sigma_{n+1}^z\right)$$

というハミルトニアンの固有関数の厳密な構成の成功にさかのぼる．（ここで，$\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ は標準的な Pauli の σ 行列である．）Bethe は特別な形の代入を使い，以来それ（Bethe Ansatz；ベーテ仮設法）は彼の名を冠して呼ばれるほど有名となった．この方法はいろいろな形で多くの他の模型，特に $1+1$ 次元量子場の理論の相対論的に不変な

模型に対しても適用できることが分かった．ハミルトニアンのスペクトルを与える典型的な答は次のように書ける：

$$E=\sum_k \varepsilon(v_k).$$

ここで，$\varepsilon(v)$ は何らかの分かっている関数（Heisenberg スピン鎖の場合は $\varepsilon(v)=-8J/(v^2+1)$）で，$v_k$ は擬粒子の rapidity または運動量と解釈でき，次の代数方程式系（Bethe 方程式）から決められる数である：

$$\left(\frac{v_k-i}{v_k+i}\right)^L=-\prod_l \frac{v_k-v_l-2i}{v_k-v_l+2i}. \qquad (4)$$

物理的に興味深い場合では，熱力学的極限における基本的な状態は擬真空に Bethe 擬粒子を満たして構成され，運動量 v_k を持つ擬粒子の数はスピン鎖の長さ L と共に無限大に近づく．この極限で上の方程式系は v_k の値の分布密度関数についての積分方程式になり，陽に解けることもある．

一般化されたスピン鎖の場合は「スピン」は群 $SU(N)$ の表現になり，ハミルトニアンの対角化は Bethe Ansatz を $N-1$ 回繰り返し適用して行う（「埋め込まれた」Bethe Ansatz の連鎖；nested Bethe Ansatz）．結果としていくつかの種類の擬粒子ができ，それらの運動量を $v_k^{(t)}$, $t=1,2,\dots,N-1$ とすると Bethe 方程式は次の形になる：

$$\prod_l \frac{v_k^{(t)}-v_l^{(t-1)}+i}{v_k^{(t)}-v_l^{(t-1)}-i}\ \frac{v_k^{(t)}-v_l^{(t)}-2i}{v_k^{(t)}-v_k^{(t)}+2i}\ \times$$
$$\times\frac{v_k^{(t)}-v_l^{(t+1)}-i}{v_k^{(t)}-v_l^{(t+1)}+i}=-1. \qquad (5)$$

近年 Bethe の方法の様々な一般化や変種が数多く提案されているが，その根本的な秘密は未だに完全には解明されていないのではないかと思われる．

4. 古典可積分性と量子可積分性の統合の一つの可能性について

この節では，伝統的な対応原理を補完するような ある主張を定式化する．これは古典的可積分性と量子的可積分性を統合する見通しを開くものである．

ここでは量子可積分系と言ったときには，非一様なスピン鎖を考えることにする．但し，その局所観測可能量は代数 $su(N)$ かその q 変形の表現にしておく．量子系での可解模型の多くは少なくとも形式的にはこの極限とみなせるので，これで十分一般的な例になっている．

この系は無限に多くの可換な運動の積分 $H_{\{J\}}$（$\{J\}=\{J_1,J_2,\dots\}$ は何らかの多重添字）を持っているので，この族から一つだけ取り出した個々のハミルトニアンを別々に考えるのではなく，全部を一度に対角化するほうが良い．さらに良い方法は，これらから母関数を作ってそれを対角化することである．標語的には次のように表される：

$$T(t_0,t_1,\dots)=\sum_{\{J\}} a_{\{J\}}\Bigl(\prod_j t_j^{J_j}\Bigr)H_{\{J\}}. \quad (6)$$

これは一般には無限個の補助変数 t_i にも依存している（この公式の $a_{\{J\}}$ はある特別なやり方で選んだ係数である）．このような母関数はマスター T 作用素（あるいは単に T 作用素）と呼ばれ，時間変数 t_i に関する時間発展作用素という意味を持っている．T 作用素の変数 t_i に関する解析的性質に重要な力学的情報が組み込まれていることが分かるので，T 作用素はこれと可換な一つ一つのハミルトニアンよりもはるかに情報を持つ豊かな対象である．このようにして構成される可換な作用素の族にはスピン鎖のハミルトニアン全体の他に，それに対応した 2 次元格子上の統計力学模型（頂点模型）の転送行列や，Baxter の Q 作用素すべてが含まれている．

模型の元々の力学変数で T 作用素を具体的に表示した形は，普通は陽には分からない．しかし分からないからと言って，一般的な関数関係式を導くのに問題はない．その関数関係式と解析的性質を使えば，T 作用素のスペクトル，そしてつまるところ最初のハミルトニアンのスペクトルを求めるという問題を完全に解くことができる．これ

らの関数関係式は長い歴史を持ち，様々な形で知られていた．ある意味ではこの関数関係式は量子可積分系の理論の頂点に位置しているとも言える．注目すべきことに，まさにここで量子可積分系の理論と古典系の理論が結びつくのである．

基本となるのは，T 作用素 (6) の関数関係式のもっとも一般的で普遍的な形が，変数 t_i についての古典的広田方程式 (1) になる，という非自明な事実である．正確に言うと，T 作用素は mKP 階層の τ 関数の一般の双線形関係式を満たし，これから広田方程式も従うのである．T 作用素（あるいはその任意の固有値）は古典的 τ 関数と同一視できる，と言っても良い：

$$T(t_0, t_1, t_2, \dots) = \tau(t_0, t_1, t_2, \dots).$$

もっと正確に主張を述べるためには，T 作用素の詳細をもう少し説明する必要がある．変数 t_i のうちの一つは特別で，普通はスペクトルパラメーターと呼ばれる．t_0 がそれであるとして，特別視を強調するために記号 $u = t_0$ を当てよう．T 作用素は u の関数で，すべての他の時間変数 $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$ はパラメーターと見なす：$T = T(u, \boldsymbol{t})$．話をはっきりさせるために，T 作用素の代わりにその任意の固有値を考えてもよい．$T_\lambda(u)$ を可換な量子転送行列の集りとする．これらは u の関数であり，Young 盤 λ にも（多成分）離散パラメーターとして依存している．T 作用素は次のような母関数として表すことができる：

$$T(u, \boldsymbol{t}) = \sum_\lambda s_\lambda(\boldsymbol{t}) T_\lambda(u). \tag{7}$$

これが公式 (6) の正確なバージョンである．和は，空な盤を含めてすべての Young 盤にわたって取り，$s_\lambda(\boldsymbol{t})$ は標準的な Schur 関数で，

$$s_\lambda(\boldsymbol{t}) = \det_{i,j=1,\dots,\ell(\lambda)} h_{\lambda_i - i + j}(\boldsymbol{t}),$$
$$\exp\Bigl(\sum_{k \ge 1} t_k z^k\Bigr) = \sum_{n \ge 0} h_n(\boldsymbol{t}) z^n$$

と定義される．（λ_i は Young 盤 λ の i 行目の長さ，$\ell(\lambda)$ は空でない行の数である．）但し，$s_\varnothing(\boldsymbol{t}) = 1$ とする．$h_n(\boldsymbol{t})$ は長さ n の一行の Young 盤 $\lambda = (n)$ に対応する Schur 関数になることに注意しよう：$h_n(\boldsymbol{t}) = s_{(n)}(\boldsymbol{t})$．普通は Schur 関数は $t_k = \frac{1}{k}\sum_i x_i^k$ となる変数 x_i についての対称関数と考える．$T_\lambda(u)$ については

$$T_\lambda(u) = \frac{\det_{i,j=1,\dots,\ell(\lambda)} T_{(\lambda_i - i + j)}(u - j + 1)}{\prod_{k=1}^{\ell(\lambda)-1} T_\varnothing(u - k)} \tag{8}$$

という行列式型の関数関係式が知られている．ここから，上の T 作用素が古典的 mKP 階層を満たし，特に広田方程式を満たすことが従う．

T 作用素は t_i の任意の値について可換なので，作用素の順序の問題は起きないことと，T 作用素の任意の固有値が広田方程式を満たすことは強調しておこう．さらに，量子系の問題に最初から入っている Planck 定数 $\hbar$ は方程式には現れず，その解にのみ出てくる．

Nested Bethe Ansatz は，古典的な広田方程式の文脈では Bäcklund 変換の連鎖と見なせ，最初の問題が自明な問題になるまで順次「服を脱がせる」ことになる．Nested Bethe Ansatz の途中段階で現れる T 作用素は，Baxter の Q 作用素のパラメーター t_i に依存する一般化と見なせる．

この節で述べたことは，超対称的な模型にもほぼそのままの形で拡張される．T 作用素の広田方程式は同じで，許される解のクラスだけが変わるのである．

5. Calogero-Moser 型多粒子系との関係

他にも，Calogero-Moser 型の多粒子系やその相対論的類似との興味深い関係もある．T 作用素をある一つの変数 t_i の関数と考えたときの零点が，他の変数に依存する様子が Calogero-Moser 型多粒子可積分系の力学と一致するのである．これは前節で述べた T 作用素の τ 関数との関係と，その解析的性質から従う．

もっと正確に定式化するために，T 作用素の解

析的性質についてより詳しく見てみよう．これは模型のもっとも重要な性質の一つである．一番簡単な有限スピン鎖の場合は，T 作用素は u の多項式であり，次数は鎖の格子点の数に等しい：

$$T(u,\boldsymbol{t}) = C\prod_{j=1}^{L}(u - u_j(\boldsymbol{t})). \qquad (9)$$

このとき，$T(u,\boldsymbol{t})$ と τ 関数の同一視から，その零点 $u_j(\boldsymbol{t})$ の運動は Calogero-Moser 系の相対論的一般化（Ruijsenaars-Schneider 系と呼ばれる）で記述され，その際 i 番目のハミルトニアンは t_i についての発展を生成する．例えば，t_1 に関する運動方程式は，

$$\ddot{u}_i = \sum_{k\neq i}\frac{2\dot{u}_i\dot{u}_k}{(u_i-u_k)^2-1}, \quad \dot{u}_i = \partial_{t_1}u_i \quad (10)$$

となる．この系は可積分で，対合的で独立な運動の積分 $\mathcal{H}_j$ を必要な数だけ持つ．

これで量子ハミルトニアンのスペクトルを求める問題がある古典力学的多体系の問題と同値であることが分かった．標準的には力学の問題は次のように立てる：粒子の最初の位置座標と速度の値 $u_j(0), \dot{u}_j(0)$ が与えられ，時間発展 $u_j(t)$ を求める．しかしながら我々の場合は問題を次のように標準的ではない形に立てなくてはいけない：最初の位置座標 $u_j = u_j(0)$ とすべての運動の積分の値 $\mathcal{H}_j$ が与えられて，初期速度 $\dot{u}_j(0)$ を求める．このように問題を立てると解は一意ではなくなる：異なる可能な解は量子ハミルトニアンの異なる固有状態に対応する．

最後に，Bethe 方程式 (5) が離散時間 t についての Ruijsenaars-Schneider 系と理解できることを注意しておこう．

6. 結び

ここでは，古典可積分系と量子可積分系のもっとも一般的かつ普遍的な関係式が事実上一致し，広田方程式に帰着することを見た．まとめると，量子力学的対応原理に次のような補足をすることができる：量子可積分な模型の各々には，その（可換な）運動の積分のなす空間上の可積分な古典力学が結びついており，元の量子模型のスペクトルに関する性質の完全な情報を保持している．

以上で，古典および量子可積分性の相互関係に関して「言葉でできるレベル」の手短な話を終わることにする．量子可積分系に関する科学の最高地点が，対応する（しかし，形式と内容の点でそれとは大きく異なる）古典可積分系の科学の頂点と結びつく，という事実は極めて著しいものであり，さらに深い理解が必要とされていると考えられる．

7. 文献とコメント

本文では文献の引用をしなかった．この節で簡単なコメントと共に引用をまとめておく．

τ 関数のソリトン方程式の理論における基本的役割は，京都スクールの研究（例えば 1) とその文献を参照）に現れた．離散広田方程式は最初に 2) に登場し，その可積分階層における意味は 3) で明らかにされた．Bethe Ansatz とその代数版は 4,5) といったレビューに詳述されている．量子転送行列の行列式の形での関数関係式 (8) は量子 Jacobi-Trudi 恒等式と呼ばれることもあるが，6,7) で発見され，超対称的な一般化は 8) で与えられた．量子転送行列と古典的 τ 関数の類似は最初に論文 9) で指摘され（10) も参照），そこで量子可積分系の可換な運動の積分のなす空間における離散的古典力学系が導入された．このアプローチの超対称模型への一般化は 11) で与えられた．マスター T 作用素についての詳細は 12,13) にある．古典可積分方程式の解の極（τ 関数の零点）の力学とその多粒子系との関係は 15) にある論文で研究された．Ruijsenaars-Schneider 系の離散時間類似の運動方程式と Bethe 方程式の一致は 16) で指摘され，τ 関数の零点の力学との関係は 9) で示された．（時として T-system と呼ばれる）広田方程式の多様な側面と応用，さらにそれと密接に結びついた Y-system と呼ばれる方程式については概説 17) を参照されたい．

8. 謝辞

著者と議論してくれた A. Aleksandrov, A. Gorsky, V. Kazakov, I. Krichever, S. Leurent, A. Orlov, T. Takebe, Z. Tsuboi と，この文の最初の原稿を読んでくれた A. Morozov に感謝する．この研究は一部，RFBR（ロシア基礎科学財団）の研究補助金 12-01-00525, RFBR の共同研究補助金 12-02-91052-CNRS, 12-02-92108-JSPS, 先導的科学教育機関支援補助金 НШ-3349.2012.2 とロシア連邦教育科学省（contract 8498）の補助を受けている．

参考文献

1) E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, in "Nonlinear integrable systems – classical and quantum", eds. M. Jimbo and T. Miwa, World Scientific, pp.39–120 (1983); 三輪哲二，神保道夫，伊達悦朗，『ソリトンの数理』，岩波書店 (2007); 佐藤幹夫，野海正俊，ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体，上智大学数学講究録 **18** (1984); 佐藤幹夫講義録，梅田亨 記，数理解析レクチャー・ノート **5**，京都大学数理解析研究所 (1989).

2) R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan* **50** (1981) 3785–3791.

3) T. Miwa, *Proc. Japan Acad.* **58** (1982) 9–12.

4) V. Korepin, N. Bogoliubov, and A. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, 1993.

5) L.D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model*, arXiv:hep-th/9605187; L.D. Faddeev, *Int. J. Mod. Phys. A* **10** (1995) 18451878, arXiv:hep-th/9404013.

6) I. Cherednik, *Funct. Anal. and Appl.* **21:2** (1987) 94–95 (translation: pgs 172–174).

7) V. Bazhanov and N. Reshetikhin, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990) 1477–1492.

8) Z. Tsuboi, *J. Phys. A* **30** (1997) 7975–7991.

9) I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann and A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.* **188** (1997) 267–304.

10) A. Zabrodin, *Int. J. Mod. Phys.* **B11** (1997) 3125–3158; A. Zabrodin, *Teor. Mat. Fyz.*, **116** (1998) 54–100 (English translation: *Theor. Math. Phys.* **116** (1998) 782–819).

11) V. Kazakov, A. Sorin and A. Zabrodin, *Nucl. Phys.* **B790** (2008) 345–413; A. Zabrodin, *Teor. Mat. Fyz.* **155** (2008) 74–93 (English translation: *Theor. Math. Phys.* **155** (2008) 567–584).

12) V. Kazakov, S. Leurent and Z. Tsuboi, *Commun. Math. Phys.* **311** (2012) 787–814.

13) A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi and A. Zabrodin, *Classical tau-function for quantum spin chains*, arXiv:1112.3310.

14) A. Zabrodin, *The master T-operator for vertex models with trigonometric R-matrices as classical tau-function*, arXiv:1205.4152.

15) H. Airault, H. McKean and J. Moser, *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977) 95–125; I. Krichever, *Funk. Anal. i ego Pril.* **14:4** (1980) 45–54 (translation: *Funct. Anal. Appl.*, **14:4** (1980) 282–290); I. Krichever, *Funct. Anal. Appl.* **12:1** (1978) 76–78; I. Krichever and A. Zabrodin, *Uspekhi Mat. Nauk*, **50:6** (1995) 3–56 (translation: *Russ. Math. Surv.*, **50:6** (1995) 1101–1150); T. Shiota, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 5844–5849.

16) F. Nijhoff, O. Ragnisco and V. Kuznetsov, *Commun. Math. Phys.* **176** (1996) 681–700.

17) A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, *J. Phys. A* **44** (2011) 103001.

（アントン・ザブロージン，生化学物理研究所*a)，理論実験物理学研究所*b)，ロシア国立研究大学経済高等学校*c)）
（たけべ・たかし，ロシア国立研究大学経済高等学校）

*a) Institute of Biochemical Physics, 4 Kosygina, 119334, Moscow, Russia
*b) ITEP, 25 B. Cheremushkinskaya, 117218, Moscow, Russia
*c) National Research University Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya Ulitsa, Moscow 101000, Russia

量子群の標準基底



木村 嘉之

本稿における**量子群**とは，Lusztig による量子群の教科書 "Introduction to Quantum Groups"[6] と同じく，Drinfeld，神保によって 1985 年に導入された複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$（より一般に対称化可能 Kac–Moody Lie 環）の普遍展開環の量子変形[*1] である量子展開環 $\boldsymbol{U}_v(\mathfrak{g})$ を意味します．ここで量子変形とは，パラメータ v を含む代数であって，$v \to 1$ なる "特殊化" において普遍展開環となる代数をいいます．量子群は，表現の圏に R 行列と呼ばれる非自明なテンソル積構造を定め，結び目の不変量や可解格子模型など多くの応用を持つだけではなく，昨今の表現論においては重要な一翼を担う対象です．その重要な一翼を担うべき理由の一つが，本稿のテーマである**標準基底**の存在とそれに連なる話題です．標準基底は，箙の表現論の**幾何学的表現論**に他ならず，その後の中島による箙多様体の幾何学的表現論と共に，昨今では**圏論化**と呼ばれる活発な分野の一つの動機づけともなっています．本稿では Lusztig による幾何学的手法を主眼とおいて，最近の進展を含めて紹介したいと思います．また，最近の進展についてと銘打たれているものの，重要な話題を包摂できていない可能性もあることにご寛恕を請うばかりです．

1. 箙の表現論と量子群

ルート系と Kac–Moody Lie 環

ルート系は，有限次元複素単純リー環に対して，Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ の同時固有空間分解（**ルート空間分解**）の同時固有値（ルート）の集合として定義されます．Chevalley は，任意の複素単純リー環に対して，整数の構造定数を持つルート空間の基底（**Chevalley 基底**）を構成しました．Chevalley 基底は，普遍展開環の $\mathbb{Z}$ 格子（Kostant 格子），随伴群の構成を初め，有限 Chevalley 群の導入など正標数の代数群の表現論において基本的な役割を果たしました．

さて，有限次元複素単純リー環を含む無限次元リー環のクラスとして，**（対称化可能）Kac–Moody Lie 環**があります．以下の条件を満たす行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を**（一般化された）Cartan 行列**といいます．

1. 任意の $i \in I$ に対して，$a_{ii}=2$.
2. 任意の $i \neq j \in I$ に対して，$a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.
3. $a_{ij}=0$ ならば $a_{ji}=0$ が成り立つ．

以下では，簡単のため[*2] $a_{ij}=a_{ji}$ を仮定します．対称 Cartan 行列に対しては，各頂点 i,j の間に a_{ij} 本の辺をもつグラフ（Dynkin 図形）が得られます．$\mathfrak{h}$ を $\#I+\mathrm{corank}A$ 次元の複素ベクトル空間，$\mathfrak{h}^*$ をその双対空間とし，$\Pi=\{\alpha_i\}_{i\in I}\subset\mathfrak{h}^*, \Pi^\vee=\{h_i\}_{i\in I}\subset\mathfrak{h}$ を一次独立な部分集合であって，$a_{ij}=\langle\alpha_j,h_i\rangle$ を満たすもの（カルタン行列の極小実現）をとるとき，Kac–Moody Lie 環は，$\mathfrak{h}\cup\{e_i\}_{i\in I}\cup\{f_i\}_{i\in I}$ を生成元とし，以下の関係式たち

1. $[h,h']=0$,
2. $[h,e_i]=\langle\alpha_i,h\rangle e_i, [h,f_i]=-\langle\alpha_i,h\rangle f_i$,
3. $[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i$,
4. $\mathrm{ad}^{1-a_{ij}}(e_i)(e_j)=\mathrm{ad}^{1-a_{ij}}(f_i)(f_j)=0\ (i\neq j)$.

を基本関係式とする Lie 環として定義されます．ここ

*1） 量子化という言葉では，可換環の非可換変形を量子化と述べるのが標準的であると思われるが，本稿では非可換環である普遍展開環の更なる変形を考えている．

*2） 多くの構成は対称化可能の場合にも拡張されているが，標準基底の理論の大きな帰結である正値性は対称型の場合にのみ知られている．

で，$\mathrm{ad}(x)(y)=[x,y]$ を表し，最後の関係式は，Serre 関係式と呼ばれています．本稿の主役である**量子展開環**は，上の定義関係式を“量子変形”することで定義されます（後述）．Kac–Moody リー環に付随するルート系は，ルート空間分解を介して定義されます．単純ルート Π に関する鏡映によって生成される Weyl 群は，ルート系に作用し，単純ルートから Weyl 群作用で得られるルートを実ルート，そうではないものを虚ルートといいます．また，$\mathfrak{h}^*$ 上に，$(\alpha_i,\alpha_j)=a_{ij}$ を満たす W 不変な対称内積が定義され，Π で生成される自由加群をルート格子といいます．また，ルート系の対称内積は，正定値，半正定値，不定値のいずれかであることが知られており，それぞれ有限型，アファイン型，不定型と呼ばれています．

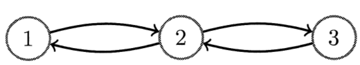
箙の表現とルート系：Gabriel の定理

Lusztig による標準基底は，Ringel による箙の表現の圏を“介した”量子群の構成を発端としています．Ringel の仕事を紹介する前に，その序奏とでも言うべき箙の表現論とルート系の間の関係について述べ，後述する Lusztig の結果を述べるために記号を準備します．グラフ (I,E)[*3] に対して，(I,H) を (I,E) の両側に向き付けられた有向グラフとします．いま，$\mathrm{out}\colon H\to I, \mathrm{in}\colon H\to I$ を辺に対してそれぞれ始点，終点を対応させる写像とします．このとき，両側に向き付けられているので，$\bar{\ }\colon H\to H$ という対合であって，$\mathrm{out}(\bar{h})=\mathrm{in}(h), \mathrm{in}(\bar{h})=\mathrm{out}(h)$ を満たすものが存在します．ここで，箙の**向き**とは，H の部分集合 Ω であって，$\Omega\cap\overline{\Omega}=\emptyset$, $\Omega\cup\overline{\Omega}=H$ を満たすものとし，**箙**とは，(I,Ω) の組を言います．

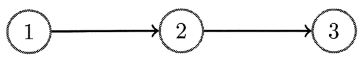
例 1. A_3 型の Dynkin 図形 (I,E)

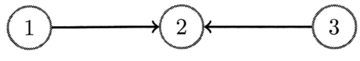


に対して，(I,H) は以下の有向グラフとなる．



向きは，2^2 個あり，例として，以下の線形箙や二部箙などがある．





k を体とし，箙の k 上の**表現**(x,V) とは，I で添字付けられたベクトル空間たち $V=\{V_i\}_{i\in I}$ とその間の線形写像 $x=\{x_h\colon V_{\mathrm{out}(h)}\to V_{\mathrm{in}(h)}\}_{h\in\Omega}$ の組をいい，$\mathsf{rep}_k(I,\Omega)$ で箙 (I,Ω) の（k 上有限次元）表現のなすアーベル圏を表します．頂点 i に 1 次元ベクトル空間を考えることで得られる既約表現を S_i で表し，$\{S_i\}_{i\in I}$ たちの拡大で得られる冪零表現のなすアーベル圏を $\mathsf{nil}_k(I,\Omega)$ で表します．さて，$\mathsf{nil}_k(I,\Omega)$ の Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{nil}_k(I,\Omega))$（対象を生成元として完全列を関係式とする加群）は，S_i の同値類たち $\{[S_i]\mid i\in I\}$ を基底とする自由加群であり，表現の同値類は，各頂点における次元の組で与えられます．この組のことを**次元ベクトル**といい，以下で表します．

$$\mathbf{dim}(x,V)=\sum \dim V_i\alpha_i.$$

Ringel 双線形形式と **Tits 二次形式**をそれぞれ以下で定めます．

$$\chi_\Omega(v^1,v^2)=\sum_{i\in I}v_i^1v_i^2-\sum_{h\in\Omega}v_{\mathrm{out}(h)}^1v_{\mathrm{in}(h)}^2,$$
$$q_\Omega(v)=\chi_\Omega(v,v).$$

ここで，$\{[S_i]\mid i\in I\}$ と Π を同一視し，Tits 形式の定める対称内積と対応する不変対称内積を同一視します．

箙 (I,Ω) の有限次元表現の圏は，（自明な場合を除いて）半単純ではありません．半単純ではないアーベル圏を理解する上で，様々な方法が考えられますが，ナイーブな問題としては直既約表現をすべて分類（！）することが考えられます．では出発点として，

- 同型類が高々有限個しかない場合（**有限表現型**[*4]）はいつだろうか？
- 直既約表現はどのような表現だろうか？

という問題を考えることが重要でしょう．これに関しては以下の Gabriel の定理が知られています．

定理 1 (Gabriel).

(I,Ω) が有限表現型 $\iff$ q_Ωが正定値,

直既約表現の同型類 $\xleftrightarrow[\mathbf{dim}]{1:1}$ 正ルート.

（代数閉体 k 上では）有限表現型ならば q_Ω が正定

*3) 簡単のため連結と仮定する．

*4) 有限表現型ではないとき，**無限表現型**という．無限表現型をさらに，**テイム表現型**と**ワイルド表現型**の 2 つに“本質的に分類可能か”どうかで分けることができる．しかしながら，多くの代数は**ワイルド表現型**となってしまう．

値であることを見ることは，Tits による以下の“幾何学的”な観察からわかります．$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ を I で次数付けられた k 上のベクトル空間とし，箙 (I,Ω) の表現全体のなすアファイン空間 $E_\Omega(V)$ と基底変換のなす簡約代数群 $G(V)$ を以下で定めます．

$$E_\Omega(V) = \bigoplus_{h\in\Omega} \mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)}),$$
$$G(V) = \prod_{i\in I} GL(V_i).$$

$G(V)$ は $E_\Omega(V)$ へ自然に作用し，$G(V)$-軌道は，箙の表現の同型類に他なりません．さて $E_\Omega(V)$ は既約なので，有限表現型の仮定より開軌道が存在します．ゆえに，作用している空間 $E_\Omega(V)$ の次元は，恒等行列の定数倍が自明に作用し，さらにその商が効果的に作用していることを考慮に入れると，$\dim G(V)-1$ 以下であることがわかります．よって，$(\dim G(V)-1)-\dim E_\Omega(V) = q_\Omega(\mathbf{dim}V) - 1 \geq 0$ がわかり，Tits 形式の定義より，正定値であることが従います．Gabriel の定理は，Bernstein–Gelfand–Ponomarev らによって，**鏡映関手**を用いたルート系とより密接な関係をもつ証明を与えられ，鏡映関手の合成である Coxeter 関手の繰り返しにより，射影加群からはじめて，任意の直既約表現が得られることも分かりました．

Kac 予想

有限表現型は有限型に限るということが判明したので，無限表現型を理解しようという試みが Nazarova, Donovan–Freislich, Dlab–Ringel らによりなされ，テイム表現型とアファイン箙が対応すること，アファイン箙の直既約表現の Kronecker 箙



の直既約表現を介した構成がなされました．まとめると，以下のような，Tits 形式を介した表現型とルート系の対応が得られました．

(I,E)	q_Ω	表現型
有限型	正定値	有限表現型
アファイン型	半正定値	テイム表現型
不定型	不定値	ワイルド表現型

Kac は，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の（絶対）直既約表現の同型類を数え上げる“多項式”（**Kac 多項式**）の存在を示し，多項式が向きによらないこと，直既約表現の同型類の集合の次元ベクトルの像が正ルートの集合であることを示しました．さらに Kac 多項式の定数項が対応するルートの重複度と一致すること，Kac 多項式の係数の正値性を予想しました．前者は，Hausel によって，後者は，Hausel–Rodriguez–Villegas–Letellier によって中島箙多様体とその Weyl 群対称性を用いて証明されました．

量子展開環

対称 Cartan 行列 $A = (a_{ij})$ に対して，量子展開環の部分代数 $\boldsymbol{U}_v^-(\mathfrak{g})$ は，$\{f_i\}_{i\in I}$ を生成元とし，v-Serre 関係式

$$\sum_{s+t=1-a_{ij}} (-1)^s f_i^{(s)} f_j f_i^{(t)}$$

で定義される $\mathbb{Q}(v)$-代数です．ここで，$f_i^{(n)}$ は，量子階乗 $[n] = (v^n - v^{-n})/(v - v^{-1})$, $[n]! = [n]\cdots[1]$ $(n \geq 1)$ を用いて定義される被除冪 $f_i^{(n)} = f_i^n/[n]!$ です．また，被除冪 $\{f_i^{(n)}\}_{i\in I, n\geq 0}$ で生成される $\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$-代数を Lusztig 格子といいます．

Ringel–Hall 代数

Hall 代数は，p を素数としたときに，有限アーベル p 群の同型類の集合の生成する自由加群に，有限アーベル p 群のフィルトレーションの数え上げによって定義される積で零対象を単位元とする結合的な積をもつ代数として Steinitz と Hall によって導入されました．Hall 代数は，対称関数環への応用など代数や組合せ論など様々な視点から研究されました．Ringel は，Gabriel の定理を動機づけとして，直既約表現の同型類の集合の生成する自由加群に極大冪零 Lie 環 $\mathfrak{n}$ と同型な積を定めることができないかと考え，Hall 代数の構成を p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ から一般の（有限な）環[*5)]へ拡張しました．R を環とし，$\mathsf{fin}R$ を有限 R 加群のなすアーベル圏とします．このとき，Ringel は $\mathscr{H}(\mathsf{fin}R)$ を $\mathsf{fin}R$ の同型類の集合 $[\mathsf{fin}R]$ の生成する自由加群とし，積を

$$f_{[N_1]} * f_{[N_2]} = \sum_{[M]\in[\mathsf{fin}R]} F^M_{N_1 N_2} f_{[M]}$$

で定めました．ここで，$F^M_{N_1N_2}$ は M のフィルトレーション $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 = 0$ で，$M_0/M_1 \simeq N_1, M_1/M_2 \simeq N_2$ を満たすものの個数とします．このとき，上の積は $f_{[0]}$ を単位元とする結合的な積を定めることが Jordan-Hölder の定理より従います．これ

*5) 任意の有限 R 加群 M, N の拡大群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(M,N)$ が有限加群であると仮定する．

を環 R に付随する Hall 代数といいます．Ringel は（有限表現型の）有限体上の箙の表現（**道多元環**）や一般に有限体上の**遺伝多元環**に付随する Hall 代数を考察しました．以下では，箙の有限体上の（冪零）表現の圏 $\mathsf{nil}_k(\Omega)$ に付随する Hall 代数を **Ringel–Hall 代数**といいます．

さて k を有限体とし，箙を有限（表現）型と仮定すると，対応する有限次元複素単純リー環の普遍展開環の $\{f_i\}_{i\in I}$ によって生成される部分代数 $U(\mathfrak{n})$ は，ルート格子 Q による次数付けをもち，各斉次成分 $U(\mathfrak{n})_\beta$ の次元は，β の正ルートでの分割（Kostant 分割）の個数と一致します．Gabriel の定理と Krull–Remak–Schmidt の定理より，（任意の向きに対して）β を次元ベクトルとする表現の同型類の個数に他なりません．Ringel は，R が（有限体上の）遺伝的かつ有限表現型の場合に，$\mathscr{H}(R)$ の構造定数を特殊化によって得る多項式（**Hall 多項式**）が存在することを示し，変数を 1 に特殊化する（！）ことで，Gabriel の定理により対応する複素半単純 Lie 環の極大冪零部分環 $\mathfrak{n}_+$ の Kostant による $\mathbb{Z}$ 格子 $U(\mathfrak{n})_\mathbb{Z}$ と特殊化された Ringel–Hall 代数が同型であることを示しました．また，交換子を用いて，直既約表現の同型類の集合の生成する（特殊化された）部分加群が Chevalley 格子 $\mathfrak{n}_\mathbb{Z}$ と同型であることを示しました．さらに Euler–Ringel 形式による捻りを Ringel–Hall 代数に加えることで，$\mathfrak{n}$ に付随する量子展開環の部分代数の $v=\sqrt{|k|}$ での特殊化との同型を示しました．ここで同型は，半単純表現 $S_i^{\oplus n}$ に対して，被除冪 $f_i^{(n)}$ を対応させせることで得られました．一般の箙の場合には Green による非退化対称内積と余積の構成により，代数としての単射が得られることが示されました．まとめると以下の定理が得られます．

定理 2 (Ringel, Lusztig, Green)．(I,Ω) を箙とし，k を有限体とする．このとき，代数の埋め込みが存在する．

$$\Gamma_\Omega\colon \boldsymbol{U}_v^-(\mathfrak{g})\big|_{v=\sqrt{|k|}} \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathsf{nil}_k(\Omega),\chi).$$

ここで，$f_i^{(n)} \mapsto S_i^{\oplus n}$ と対応する．

2. 標準基底

2.1 量子群の PBW 基底

Chevalley の基底とその Poincaré–Birkhoff–Witt (=PBW) 基底の“量子変形”という問題を考えてみます．しかしながら，そもそも“リー環”は存在しないため，PBW 基底というのが意味を持ちません．Lusztig は，リー環 $\mathfrak{g}$ の随伴表現 $\mathfrak{g}$ への（Weyl 群の）Tits 拡大の作用の量子変形として量子群へのブレイド群の自己同型 $\{T_i\}_{i\in I}$ を導入し，ルートを単純ルートから Weyl 群の鏡映で得ていくように，ルートベクトルをブレイド群を用いて以下のように定めました．すなわち，Weyl 群の最長元 w_0 の最短表示 $\overrightarrow{w_0}=(i_1,\cdots,i_N)$ を固定し，$\beta_k := s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$ と定めると，$\{\beta_k\}_{1\le k\le N}$ は正ルート全体となります．このとき，

$$f_{\beta_k} := T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{k-1}}(f_{i_k}) \in \boldsymbol{U}_v^-(\mathfrak{g})$$

と定めました．また，階数 2 の場合のルートベクトル（の被除べき）の間の交換子の構造定数が $\mathbb{Z}[v^{\pm1}]$ に含まれることを示し，

$$f(\overrightarrow{c},\overrightarrow{w_0}) := f_{\beta_1}^{(c_1)}\cdots f_{\beta_N}^{(c_N)}$$

というルートベクトル（の被除べき）の単項式の集合（PBW 基底）が Lusztig 格子の $\mathbb{Z}[v^{\pm1}]$ 上の自由基底を与えることを示しました．Chevalley 基底の応用と平行して，PBW 基底は，v が 1 の冪根の場合の量子群の表現論において，基本的な役割を果たしました．また，正標数の代数群の表現論と冪根の場合の量子群の表現論，さらにはアファイン・リー環の表現論をつなぐ予想（Lusztig プログラム）を提唱しました．

2.2 PBW 基底と標準基底

Lusztig は，1989 年の秋学期に MIT において量子群と Ringel の仕事の解説を行いました．その中で，ADE 型の量子群の場合に，Ringel–Hall 代数を有限体上の $E_\Omega(V)$ 上の $G(V)$ 不変な関数の合成積代数として幾何学的に再構成し，Ringel–Hall 代数における鏡映関手の振舞いが組み紐群作用に他ならないことを見抜き，箙の表現の同型類のなす基底と PBW 基底が同定されることを示しました．そして PBW 基底に対して，箙の表現の幾何，とくに軌道閉包の特異点解消を用いて，有限 Hecke 環の Kazhdan–Lusztig 基底の類似として，PBW 基底のバー対合に関する上三角性，$v=\infty$ での PBW 基底の振舞いを調べ，箙の向きに依存しない**標準基底**の存在を証明しました．その中で，標準基底とは関数と層の辞書[*6)]の対応の元では，軌道閉包に付随する交差コホモロジー複体と呼ばれる**偏屈層**に対

*6) 有限体の代数閉包上の代数多様体上 Frobenius 作用つき ℓ 進層（の複体）に対して，Frobenius 固定点＝有限体値点上の関数を Frobenius 跡として関数を得る対応．

応することが示されました．また標準基底は，量子群 $U_v^-(\mathfrak{g})$ の基底だけではなく，自然な射影を通じて，有限型量子群の有限次元既約表現 $V(\lambda)$ の基底も与えることが示されました．また，柏原による大域結晶基底と標準基底が一致することも示されました．

2.3 標準基底と偏屈層

さて，箙の表現は，巡回箙の場合を除いては，アファイン型ですら一般には各 $E_\Omega(V)$ に無限個の $G(V)$ 軌道があり，その中から基底になりそうなものを "選び出す" ということは，一般的には困難であることが想像に難くありません*7)．しかしながら，そして指標層の理論の誘導/制限関手など様々な動機づけの下，ℓ 進層に関する Weil 予想の一般化である Beilinson–Bernstein–Deligne–Gabber による分解定理を介した定義に Lusztig は到達するのでした．$\mathbf{dim}V$ を実現するような I の列 $\overrightarrow{i}$ に対して，$\overrightarrow{i}$ に付随する旗多様体の積 $\mathcal{F}_{\overrightarrow{i}}$, $\overrightarrow{i}$ を組成列として持つような表現と組成列の組のなす旗多様体 $\mathcal{F}_{\overrightarrow{i}}$ 上のベクトル束 $\widetilde{\mathcal{F}}^{\Omega}_{\overrightarrow{i}}$ と射影 $\pi^{\Omega}_{\overrightarrow{i}}\colon \widetilde{\mathcal{F}}^{\Omega}_{\overrightarrow{i}} \to E_\Omega(V)$ を考えます．$\widetilde{\mathcal{F}}^{\Omega}_{\overrightarrow{i}}$ は非特異なので，分解定理を適用すると定数層（のシフト）の押し出し $\mathcal{L}^{\Omega}_{\overrightarrow{i}} := (\pi^{\Omega}_{\overrightarrow{i}})_!(\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\dim \widetilde{\mathcal{F}}^{\Omega}_{\overrightarrow{i}}])$ は単純偏屈層（のシフト）の直和に分解します．よって，そのような複体 $\mathcal{L}^{\Omega}_{\overrightarrow{i}}$ に直和因子として含まれる偏屈層たち $\mathcal{P}_\Omega$ から直和とシフトで生成される半単純複体 $\mathcal{Q}_\Omega$ のなす "量子" Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{Q}_\Omega)$ を考えればよいということに Lusztig は辿り着きました．ここで，"量子" Grothendieck 群とは，半単純複体を生成元とする加群に，直和分解を足し算，シフトを v による掛け算とする関係式を置いた $\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$ 加群のことを言います．Ringel–Hall 代数の積は，$\mathcal{Q}_\Omega$ 上の**誘導関手**から Frobenius 跡を通じて対応します．また，（捻られた）余積 r は $\mathcal{Q}_\Omega$ 上の**制限関手**として実現されます．そして同変偏屈層のコホモロジーから定義されるペアリングで，$K_0(\mathcal{Q}_\Omega)$ に非退化な内積で誘導・制限関手と整合的なものが構成されます．さらに，$\mathcal{P}_\Omega$ は向き Ω に関して，ℓ 進層における Fourier 変換である Fourier–Deligne 変換を介して互いに移り合うということ，Fourier–Deligne 変換と誘導・制限関手が整合的であることが示されました．以上の結果と単純射影加群に関する考察を用いて以下が示されました．

*7) アファイン箙の場合には，直既約表現の分類を用いて標準基底を具体的に書き下すことができることが知られている．しかし分類のためには，Lusztig 箙多様体と特性多様体を介した構造の記述が必要である．

定理 3 (Lusztig, Grojnowski–Lusztig). $\mathbb{Z}[v^{\pm1}]$ 代数としての同型

$$\Gamma_\Omega \colon \boldsymbol{U}_v^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}[v^{\pm1}]} \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{Q}_\Omega)$$

が，$f_i^{(n)} \mapsto 1_{ni}$ によって与えられる．ただし，1_{ni} は 1 点 $E_\Omega(n\alpha_i) = \{0\}$ 上の定数層の同型類を表す．また，$\boldsymbol{B} = \Gamma_\Omega^{-1}(\mathcal{P}_\Omega)$ は Ω のとり方に依らない $\mathbb{Z}[v^{\pm1}]$-自由基底を与える．これを標準基底という．さらに，$\boldsymbol{B}$ は柏原の大域結晶基底と一致する．

3. LLTA 理論とその量子化

Lascoux–Leclerc–Thibon–有木理論（**LLTA 理論**）とは，一言で述べるならば，A 型の岩堀–Hecke 環やアファイン Hecke 環のモジュラー表現論を量子群の対称性を介して理解する理論です．Lascoux–Leclerc–Thibon は，Kleshchev による対称群のモジュラー分岐則と Misra–三輪によるアファイン量子展開環の基本表現の結晶基底の組合せ的構造（結晶構造）の類似を動機付けとし，アファイン量子群の基本表現の標準基底による分解係数の記述を予想しました．LLT 予想は有木によって一般化され，A 型アファイン Hecke 環の有限次元加群圏と A 型アファイン Hecke 環の有限次元商である有木–小池代数の加群圏の Grothendieck 群がそれぞれアファイン A 型 Lie 環の下三角部分環の普遍展開環，可積分表現（の次数双対）が同型であり，単純加群のなす基底が双対標準基底の特殊化と同定されることが示されました．

箙 Hecke 環

しかし，ここでしっくりこないことがあります．当然ながら標準基底の特殊化は，量子群を介して初めて定義され，また，結晶構造も $v \to 0$ の極限を考察することで初めて理解される対象でした．よって素朴な疑問として，以下が考えられます．

- 有木による圏論化は，"量子化" された形で証明されるべきではないか？
- LLTA 理論とは逆の視点として，アファイン A 型以外の標準基底も "Hecke 環" の表現としての意味付けを持つのではないか？

など様々な疑問が湧き出ます．これらの疑問に答えるべくして導入された Hecke 環が，Khovanov–Lauda[3, 4] と Rouquier[8] によって独立に導入された**箙 Hecke 環**です．箙 Hecke 環 R は，箙 (I, Ω) を用いて定義される次数付き代数たち $\{R_\Omega(n)\}_{n\geq0}$ で，自明な箙 $(\{i\}, \emptyset)$ の場合には，$R_\Omega(n)$ が A_n 型アファイン冪零 Hecke 環となります．A_n 型アファイン冪零 Hecke 環は，A 型旗多様体の同変コホモロジー環に他ならず，唯一の（自己双対）直既約射影加群をもちます．また次元ベクトルごとに環として量子群のルート空間分解に対応する環としての直既約分解 $R(n) = \bigoplus_{|\beta|=n} R(\beta)$ されます．$\mathsf{pmod}R(n)$ を有限生成次数付き射影 $R(n)$ 加群のなす完全圏とすると，次数付けを用いて Grothendieck 群は "量子化" され，誘導関手が完全関手となり量子群 $\boldsymbol{U}_v^-(\mathfrak{g})$ の積を圏論化することが証明されました．

定理 4 (Khovanov–Lauda[3, 4], Rouquier[8]). $\mathbb{Z}[v^{\pm1}]$-代数としての同型が存在する：

$$\boldsymbol{U}_v^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}[v^{\pm1}]} \simeq \bigoplus_n K_0(\mathsf{pmod}R(n)).$$

ここで，各頂点 i に対して被除冪 $f_i^{(n)}$ に対して，$R(n\alpha_i)$ の唯一の（自己双対）直既約射影加群を対応させる．

また，巡回商と呼ばれる有限次元商に対しても，Webster, Kang–柏原によって可積分最高ウェイト表現（の $\mathbb{Z}[v^{\pm1}]$-格子）の圏論化が得られることが証明されました．また Varagnolo–Vasserot[10]，Rouquier[9] により，同変ホモロジーを介して，Lusztig の標準基底と箙 Hecke 環の直既約射影加群のなす基底が同定されました．

4. 結言：量子クラスター代数

クラスター代数とは，Fomin–Zelevinsky によって導入された代数で，**クラスター変数**と呼ばれる組合せ的な操作で定義される変数たちを生成元とする可換環で，その量子変形として Berenstein–Zelevinsky, Fock–Goncharov によって**独立に量子クラスター代数**が導入されました．それぞれ有理関数体（量子トーラスの非可換分数体）の部分環として定義され，**（量子）クラスター単項式**は，同じ "クラスター" に含まれる**（量子）クラスター変数**たちの単項式として定義されます．代数群に由来する代数多様体の座標環やその量子変形には，（量子）クラスター代数の構造が定まり，クラスター単項式を含み，非負整数を構造定数として持つ "標準基底" が存在するだろうという作業仮説（正値

性予想）を教条としつつ，クラスター代数は高階 Teichmüller 理論，量子離散可積分系，Calabi–Yau 三角圏，非可換 Donaldson–Thomas 不変量といった様々な話題と関わりを持ちながら急速に発展してきました．Hernandez–Leclerc[1,2]は，Schur–Weyl 双対性に基づき，量子アファイン代数の有限次元表現の圏を用いたクラスター代数の圏論化（**モノイダル圏論化**）を提唱し，Hernandez–Leclerc, 中島[7]と筆者ら[5]により非輪状型箙に対応するクラスター代数のモノイダル圏論化が得られました．その中で，量子群と量子アファイン代数の有限次元表現環の量子化（**量子表現環**）の間の同型が得られました．近年では，曲面の三角形分割（やその高階化）から生じる（量子）クラスター代数と数理物理の関わりが指摘されていることに標準基底の新展開を期待しつつ筆を擱くこととしたいと思います．

参考文献

1) D. Hernandez and B. Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, **154**:265–341, 2010.
2) D. Hernandez and B. Leclerc. Quantum Grothendieck rings and derived hall algebras. arXiv preprint arXiv:1109.0862, 2011.
3) M. Khovanov and A. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I. *Represent. Theory* **13** (2009), 309–347.
4) M. Khovanov and A. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 2685–2700.
5) Y. Kimura and F. Qin. Graded quiver varieties, quantum cluster algebras, dual canonical basis. arXiv preprint arXiv:1205.2066, 2012.
6) G. Lusztig. *Introduction to quantum groups*, volume 110 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
7) H. Nakajima. Quiver varieties and cluster algebras. *Kyoto Journal of Mathematics*, **51(1)**:71–126, 2011.
8) R. Rouquier. 2-Kac-Moody algebras. arXiv preprint arXiv:0812.5023, 2008.
9) R. Rouquier. Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras. *Algebra Colloquium* **19(02)**:359–410, 2012.
10) M. Varagnolo and E. Vasserot. Canonical bases and KLR-algebras. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **659**: 67–100, 2011.

（きむら・よしゆき，大阪市立大学数学研究所）

2次超曲面の射影幾何学とカラビヤウ3様体



髙木 寛通

1. 前口上

複素 $n+1$ 次対称行列は n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内の2次超曲面を定める．互いに定数倍である対称行列は同じ2次超曲面を定めるので，2次超曲面全体は $n+1$ 次対称行列の上半成分を斉次座標とする $\binom{n+2}{2}-1$ 次元射影空間でパラメーター付けられる．その n 次元部分射影空間に対応する部分族を考えると，その射影幾何から興味深い多様体が対になって現れる．$n=3$ の場合には，Enriques 曲面と特異 Fano 3様体が現れるが，その研究の歴史は古い．ここに現れる Enriques 曲面は Reye 合同型と呼ばれるもので，1882年 Reye によって発見された．一方で，特異 Fano 3様体は Artin-Mumford の2重4次3様体と呼ばれ，単有理的だが有理的でない3様体の重要な例を与えるものとして知られている．

最近，細野忍氏（東大数理）との共同研究において，我々は $n=4$ の場合に辿り着いた．この場合の多様体の対は2つの Calabi-Yau 3様体であることが判明するが，我々がこれらに遭遇したのは，導来圏を共有する Calabi-Yau 3様体とミラー対称性の関係に導かれたためだった．この解説記事では，ミラー対称性，導来圏という現代的な視点が古典代数幾何学的対象に新しい息吹を与える様を伝えたいと思う．

以下，n 次元非特異射影多様体であって，至る所消えない正則 n 型式を持ち，正則 $1,\ldots,n-1$ 型式を持たないものを **Calabi-Yau 多様体**と言う．$n=2$ の場合は **$K3$ 曲面**と呼ばれており，$n=3$ の場合，**Calabi-Yau（CY）3様体**と呼ぶことにする．

2. 導来圏と Fourier-Mukai 変換

向井茂氏は，Abel 多様体 A と，第1 Chern 類が消えている直線束をパラメーター付ける双対 Abel 多様体 $\hat{A}$ の導来圏が3角圏として同値であることを示した．その手法は，$A\times\hat{A}$ に含まれる直線束の普遍族を用いるものであった．こうして，現在 **Fourier-Mukai（FM）変換**と呼ばれている，代数多様体の導来圏の同値を示す強力な手法が誕生した．

一般に，多様体 X の連接層の導来圏を $\mathcal{D}^b(X)$ で表す．多様体 X, Y に対して $\mathcal{D}^b(X)$ と $\mathcal{D}^b(Y)$ が3角圏として同値であるとき，X と Y は**導来同値**であると言う[1)]．

向井氏は，$K3$ 曲面 S 上の適当な不変量を固定した安定（連接）層のモジュライ空間には複素シンプレクティック構造が入る，特に2次元でコンパクトであれば $K3$ 曲面になる，ということを示した[2)]．では S と T の間にはいかなる関係があるのであろうか？ 安定層の普遍族が存在するならば，この問に FM 変換が見事に答えてくれる．

定理 1. S, T を $K3$ 曲面とするとき次は同値：
(1) T は S の安定層のモジュライ空間であり，

さらに $S\times T$ 上に安定層の普遍族である連接層が存在．(2) S と T は導来同値．

(1) $\Rightarrow$ (2) の証明に，安定層の普遍族を用いたFM変換が使われている．

3. 等質空間の線形切断

導来同値な $K3$ 曲面の例は，単純代数群のコンパクトな等質空間の線形切断として得られる．これも，向井氏によって発見，研究されたものである．

射影多様体 $\Sigma\subset\mathbb{P}(W)$ を考える．射影多様体 $X\subset\Sigma$ が Σ の**余次元 r の線形切断**であるとは，X の Σ における余次元が r であり，かつ，W の余次元 r の部分ベクトル空間 L が存在して，$X=\Sigma\cap\mathbb{P}(L)$ と表されるということである．Σ を r 個の超平面で切断したもので，その Σ における余次元が r であるものと言ってもよい．

G を単純代数群，P をその極大放物型部分群とすると，等質空間 G/P は G のコンパクトな等質空間であり，その Picard 群は $\mathbb{Z}$ に同型である．Picard 群の正の生成元 D によって G/P を射影空間 $\mathbb{P}(W)$ に埋め込んでおく．ここで W は D の大域切断のなすベクトル空間の双対，$\mathbb{P}(W)$ はその射影化である．

G/P の最も簡単な例が，n 次元ベクトル空間 V における r 次元部分ベクトル空間全体をパラメーター付ける **Grassmann 多様体** $\mathrm{G}(r,n)$ である．これは Plücker 埋め込みによって，射影空間 $\mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1}$ に埋め込まれる．$r=2$ の場合，その斉次座標は $x_{ij}\,(1\le i<j\le n)$ という形をしており，$\mathrm{G}(2,n)$ は n 次歪対称行列 (x_{ij})（ただし，$i=j$ のとき $x_{ij}=0$, $i>j$ のとき $x_{ij}=-x_{ji}$ と置く）の4次主小行列式のルート（Pfaffian と呼ばれる）で定義される．例えば，$\mathrm{G}(2,4)$ は2次超曲面 $\{x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23}=0\}\subset\mathbb{P}^5$ である．

G/P の線形切断として得られる $K3$ 曲面 S は，1) 10次元直交 Grassmann 多様体 $\mathrm{OG}(5,10)$ の余次元8の線形切断，2) 8次元 Grassmann 多様体 $\mathrm{G}(2,6)$ の余次元6の線形切断，3) 6次元シンプレクティック Grassmann 多様体 $\mathrm{Sp}(3,6)$ の余次元4の線形切断，4) 5次元 G_2 型随伴等質空間 Γ の余次元3の線形切断，の4種に限られる．

一般にベクトル空間 W の双対ベクトル空間を W^* で表す．W^* の零でない元は，$\mathbb{P}(W)$ において，その零点集合として超平面を定める．こうして，$\mathbb{P}(W^*)$ は $\mathbb{P}(W)$ の超平面をパラメーター付けていると考えることができる．非特異射影多様体 Σ に対して，Σ に接する超平面全体をパラメーター付ける $\mathbb{P}(W^*)$ の部分多様体 Σ^* を Σ の**射影双対**と呼ぶ．例えば，$\mathrm{G}(2,n)$ の射影双対は，双対射影空間の斉次座標を y_{ij} と書き，それを n 次歪対称行列の成分と見なすとき，n が奇数ならば，n 個の $n-1$ 次主行列式のルートで定義される余次元3の射影多様体であることが知られている．

G/P の線形切断 $X=(G/P)\cap\mathbb{P}(L)$ に対して，少なくとも L が一般的であれば，$(G/P)^*\cap\mathbb{P}(L^\perp)$ は $(G/P)^*$ の線形切断になる．ここで，$L^\perp$ は双対 pairing $W\times W^*\to\mathbb{C}$ に関する L の直交空間である．$\dim L^\perp=r$ に注意すれば，$(G/P)^*\cap\mathbb{P}(L^\perp)$ は $\mathbb{P}(L^\perp)\simeq\mathbb{P}^{r-1}$ の部分多様体である．これを X の**直交線形切断**と呼ぶ．

G/P の線形切断である $K3$ 曲面 S の直交線形切断は，$\mathrm{OG}(5,10)$ と $\mathrm{Sp}(3,6)$ の場合に再び $K3$ 曲面になることが分かる．これを T で表す．$\mathrm{OG}(5,10)$ の場合，その射影双対は $\mathrm{OG}(5,10)$ に同型であり，S の直交線形切断は再び $\mathrm{OG}(5,10)$ の余次元8の線形切断である．S, T はともに $\mathrm{OG}(5,10)$ の線形切断であるが同型ではない．$\mathrm{Sp}(3,6)$ の場合，その射影双対は4次超曲面であり，従って T は $\mathbb{P}^3$ の4次曲面である．さらに G_2 型等質空間 Γ の場合にも少し修正すれば $K3$ 曲面が得られる．Γ の射影双対は6次超曲面であり，よって直交線形切断は $\mathbb{P}^2$ の6次曲線である．$\mathbb{P}^2$ の6次曲線で分岐する2重被覆を取れば $K3$ 曲面となるので，G_2 の場合には，この $K3$ 曲面を T で表すことにする．いずれの場合も T は S 上の安定層のモジュライ空間となっているのだが，普遍族が存在するのは，$\mathrm{OG}(5,10)$ の場合に限られることが知られている．従って，$\mathrm{OG}(5,10)$ の

場合には定理1により S と T は導来同値になる．

4. 導来同値な CY 3 様体の例

導来同値な $K3$ 曲面の例に倣って，G/P の線形切断になっている CY 3 様体を探すと，その直交線形切断とうまく関係がつく CY 3 様体が見つかるのは，10 次元 Grassmann 多様体 $\mathrm{G}(2,7)$ の余次元 7 の線形切断の場合に限られる．このCY 3 様体を X_0 で表す．この場合，直交線形切断 $Y_0 = \mathrm{G}(2,7)^* \cap \mathbb{P}^6$ も CY 3 様体であり，Borisov と Caldararu は，$X_0 \times Y_0$ の中に Y_0 でパラメーター付けられる X_0 内の種数 14，次数 20 の曲線の平坦族（代数幾何における一種の連続性を持つ族）を構成し，その平坦族のイデアル層を用いた FM 変換によって，X_0 と Y_0 が導来同値であることを示した．

なお，CY 3 様体の場合，$K3$ 曲面の安定層のモジュライ理論の拡張は見つかっていない．代わって存在する枠組みは Donaldson-Thomas (DT) 理論である．Borisov と Caldararu の構成した曲線の平坦族は，DT 理論の曲線の数え上げ（BPS 数え上げ）と関連すると思われているが，よく分かっていないのが現状である．

5. ミラー対称性と導来同値

$K3$ 曲面の場合の導来同値は Torelli の定理を向井格子に拡張した Orlov の定理で完全に判定できる．CY 3 様体の場合，対応する格子の理論がなく手掛かりがなくなるが，数理物理に起源を持つミラー対称性が1つの指導原理を与える．

4 節で考えた CY 3 様体 X_0, Y_0 を例にとって考えてみる．X_0 のミラー族 $\mathcal{X}_0^\vee \to \mathbb{P}^1$ を構成すると，その周期積分は Picard-Fuchs 微分方程式を満たす．このとき，微分方程式は $\mathbb{P}^1$ の点 0 と ∞ に極大べき単モノドロミーを持つことが観察される．ミラー対称性によれば，ミラー族の複素構造の変形は，X_0 の複素ケーラー構造の変形と見なされる．さらに物理的考察と合わせると，極大べき単モノドロミーを表す行列から，X_0 のオイラー数，次数，第 2 Chern 類の次数などの幾何学的不変量が読み取れる．ところが，極大べき単モノドロミーを持つ点が 2 つあることから，その 1 つから X_0 の不変量を読み取るとき，他方からは，もう 1 つの CY 多様体の不変量が読み取れる．こうして，ミラー対称性を指導原理として，Y_0 の存在が予言され，実際，上記のようにその存在が確認されたのであった．

Kontsevich の提唱したホモロジー的ミラー対称性では，連接層のなす導来圏と深谷圏の導来圏が互いに入れ替わる CY 3 様体の対を互いにミラー対称的であると考えている．従って，もし，CY 3 様体 X_0, Y_0 がミラー族を共有するならば，それらは導来同値であろうと予想される．

X_0, Y_0 がミラー族を共有するかどうかは未解決であるが，次のように考えることもできる．連接層の導来圏の自己同値は，ミラーのシンプレクティック微分同相によって引き起こされる深谷圏の導来圏の自己同値に対応する．ミラー族 $\mathcal{X}_0^\vee$ の底空間である $\mathbb{P}^1$ 内の上半平面内の道に沿って，微分方程式の解を解析接続すると，極大べき単モノドロミーを持つ 2 つの点における解の整基底の間に非自明な変換が起こる．それがミラーのシンプレクティック微分同相に由来するのならば，微分同相は X_0 の連接層の導来圏の自己同値に対応し，X_0 以外の CY 多様体の存在を示唆しないが，そうでない場合，その微分同相は X_0 の連接層の導来圏から別の CY 3 様体の連接層の導来圏への同値に対応すると考えられる．

6. 等質空間を越えて

6.1 2 つの CY 3 様体

我々は，ミラー対称性を手掛かりに微分方程式のモノドロミー性質を調べる過程で，導来同値な新しい CY 3 様体の対に導かれた[4]．

以下では，$\binom{n+2}{2} - 1$ 次元射影空間の n 次元部分射影空間 P を一般的に選ぶことにする．$n = 4$ のとき，P でパラメーター付けられる 2 次超曲面

族を出発点にして，我々が遭遇した新しい CY 3 様体の対は次のように定義される．

P において特異な 2 次超曲面全体は，5 次対称行列の行列式の零点集合である 5 次超曲面 H でパラメーター付けられる．P を一般的に選んでいるため，H は階数 3 と 4 の 5 次対称行列に対応する点のみを含み，階数 3 の 5 次対称行列に対応する点の集合 C は，次数 20，種数 26 の曲線であることが分かる．階数 4 の 5 次対称行列が定める 2 次超曲面は，$\mathbb{P}^3$ の非特異 2 次曲面 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の錐に同型であるから，連結な平面族を 2 つ持つ．これに対して階数 3 の 5 次対称行列が定める 2 次超曲面は，連結な平面族を 1 つしか持たない．これによって，2 次超曲面とそれに含まれる連結な平面族の対をパラメーター付ける空間を Y とすれば，C で分岐している H の 2 重被覆 $Y \to H$ が定まる．Y は CY 3 様体であることが示され，不変量 $\deg = 10$, $c_2 \cdot H = 40$, $h^{1,1} = 1$, $h^{2,1} = 26$ を持つことが分かる．我々は Y を **2 重対称行列式型 CY 3 様体**と呼んだ．

他方，$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の点を 5 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を用いて $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と書くことにすると，5 次対称行列 A に付随する対称双線形型式は，$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の因子 $D_A := \{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = 0\}$ を定める．P の基底となる対称行列 $A_1, \ldots, A_5$ を選ぶことで，P に属する対称行列に対応する $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の因子すべての交わりは，$D_{A_1}, \ldots, D_{A_5}$ の完全交叉であることが分かる．これは CY 3 様体であるが，$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の成分の入れ替えで定まる対合写像 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ で不変であるから，その商を取ると，再び CY 3 様体 X が得られて，不変量 $\deg = 35$, $c_2 \cdot H = 50$, $h^{1,1} = 1$, $h^{2,1} = 26$ を持つことが分かる．これを **Reye 合同型 CY 3 様体**と呼ぶ．

実は Reye 合同型 CY 3 様体のミラー族とその Picard-Fuchs 微分方程式は，“CY 微分方程式” と呼ばれる微分方程式の大きなリストに含まれている[4,5]．我々はその極大べき単モノドロミーの性質から，Y の存在について示唆を得ていたのであった．

以下では，X（および Y）が，非コンパクトな

等質空間のコンパクト化の線形切断になっていることを明らかにし，X, Y という対の存在が極めて自然であることを見ることにする[6]．

6.2 Reye 合同型 CY 3 様体 X

写像 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ を次のように定める：$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の双斉次座標を $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$，$\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ の斉次座標を w_{ij} $(1 \le i \le j \le n+1)$ とするとき，点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \big((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_n)\big)$ の像を $w_{ii} = x_i y_i$ $(1 \le i \le n)$，$w_{ij} = x_i y_j + x_j y_i$ $(1 \le i < j \le n)$ を斉次座標に持つ点 $w_{\boldsymbol{xy}}$ とする．この写像の像 $\mathscr{X}$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の成分の入れ替えで定まる対合写像による商であることが容易に確かめられる．簡単な計算により，$\mathscr{X}$ の点に対応する対称行列のすべての 3 次小行列式が消えていることが分かる．実は，$\mathscr{X}$ は $\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ において，3 次小行列式の共通零点集合，言い換えれば，階数 2 以下の対称行列全体に対応する部分集合であることが分かる．また，$\mathscr{X}$ は $\mathbb{P}^n$ の 0 次元で次数 2 のサイクルをパラメーター付けている Chow 多様体であることも知られている．

写像 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ を対角線集合 $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^n\} \simeq \mathbb{P}^n$ に制限すると，それは像への同型写像になる．これを $\mathbb{P}^n$ の（2 次）Veronese 埋め込みと呼び，その像を $v_2(\mathbb{P}^n)$ で表す．これは対称行列の 2 次小行列式の共通零点集合，言い換えれば，階数 1 の対称行列全体に対応する部分集合であることが分かる．

射影幾何的に言えば，$\mathscr{X}$ は $v_2(\mathbb{P}^n)$ の 2 点を結ぶ直線全体の和集合（割線多様体）である．これは，対称行列の階数による $\mathscr{X}$ および $v_2(\mathbb{P}^n)$ の特徴付けから従う．

$\mathscr{X}$ には $\mathbb{P}^n$ の自己同型群 $\mathrm{PGL}\,(n+1)$ が自然に作用しており，階数 1 に対応する部分，つまり $v_2(\mathbb{P}^n)$ と，階数 2 に対応する部分，それぞれに等質的に作用している．また，$v_2(\mathbb{P}^n)$ は $\mathscr{X}$ の特異点集合になっている．

$A = (a_{ij})$ を $n+1$ 次対称行列とするとき，A と対称行列 $w = (w_{ij})$ の内積を $\sum_{1 \le i \le j \le n+1} a_{ij} w_{ij}$ で定めれば，$\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ と $n+1$ 次対称行列をパラメーター付ける $\binom{n+2}{2}-1$ 次元射影空間は互いに双対になる．以下，後者を $(\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1})^*$ で表す．$(\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1})^*$ の一般的な n 次元部分射影空間 P を選んでいたが，その直交空間 $P^\perp \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ により，$\mathscr{X}$ の線形切断 $X := \mathscr{X} \cap P^\perp$ が定まる．$n = 4$ のとき，これがまさに上で定義した Reye 合同型 CY 3 様体に他ならない．$n = 3$ のとき，X は古典的な Reye 合同型 Enriques 曲面である．

6.3 2 重対称行列式型 CY 3 様体 Y

$(\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1})^*$ において，階数 n 以下の対称行列をパラメーター付ける多様体は，対称行列の行列式の零点集合である $n+1$ 次超曲面 $\mathscr{H}$ であるが，これは $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ の射影双対であることが分かる．$\mathscr{X}$ の射影双対ではなく，この $\mathscr{H}$ を考えたほうが話がうまくいく．n が偶数のとき，階数 n の対称行列の定める 2 次超曲面は $\mathbb{P}^{\frac{n}{2}}$ の連結族を 2 つ持つ．これによって $\mathscr{H}$ の 2 重被覆 $\mathscr{Y} \to \mathscr{H}$ が構成できる．これは階数 $n-1$ 以下の対称行列に対応する部分集合で分岐している．$\mathscr{H}$ の P への制限を H，その $\mathscr{Y}$ への引き戻しを Y とする．$n = 4$ のとき，これが上で定義した 2 重対称行列式型 CY 3 様体に他ならない．

なお，n が奇数のときは事情が異なり，階数 $n+1$ の対称行列の定める 2 次超曲面が $\mathbb{P}^{\frac{n-1}{2}}$ の連結族を 2 つ持つことから，$\mathscr{H}$ で分岐する $(\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1})^*$ の 2 重被覆が構成できる．$n = 3$ のとき，2 重被覆を P に制限して，$P \cap \mathscr{H}$ で分岐する $P \simeq \mathbb{P}^3$ の 2 重被覆が得られるが，これが冒頭で触れた Artin-Mumford の 2 重 4 次 3 様体である．

■ 7. 導来同値と BPS 数 ■

X でパラメーター付けられる Y 内の種数 3，次数 5 の曲線の平坦族を構成し，そのイデアル層を用いた FM 変換によって X と Y が導来同値であることを示すことができる[6]．

このような曲線族は，射影幾何的に次のように構成される．X は $\mathscr{X}$ の中で完全交叉であり，特異点を持たないから，$\mathscr{X}$ の特異点集合 $v_2(\mathbb{P}^4)$ と交わ

らない．$v_2(\mathbb{P}^4)$ は $\mathbb{P}^4\times\mathbb{P}^4$ の対角線集合の像でもあるから，X の点 x は $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{P}^4\times\mathbb{P}^4$ $(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y})$ と言う形の点の像 $w_{\boldsymbol{xy}}$ であり，従って，x から $\mathbb{P}^4$ の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を通る直線が決まる．これを l_x で表す．$\mathbb{P}^4$ の直線をパラメーター付ける多様体は，$\mathbb{C}^5$ の2次元部分ベクトル空間をパラメーター付ける多様体と見なせば G(2,5) に他ならないことに注意すると，$x\mapsto l_x$ によって，X から G(2,5) への写像が得られる．実はこれは像への同型写像になっていることが分かる．よって，x と $[l_x]\in$ G(2,5) を同一視して，$X\subset$ G(2,5) と考えることにする．このとき，X を P に属する対称行列の定める2次超曲面で明確に捉えることができる．P に属する対称行列 A の定める2次超曲面 Q_A が l_x を含むのは，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y}=0$ が成り立つときである．ここで，$A=(a_{ij})$, $w_{\boldsymbol{xy}}=(w_{ij})$ に対して，簡単な計算から ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}=\sum_{1\leq i\leq j\leq n+1}a_{ij}w_{ij}$ が成り立つことが分かる．これにより，$w_{\boldsymbol{xy}}\in X=\mathscr{X}\cap P^{\perp}$, $[A]\in P$ であることから，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}=0$ という条件はいつでも成り立つ．よって，$l_x\subset Q_A$ となる A は，P において ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y}=0$ で定義される2次元部分射影空間（射影平面）P_x でパラメーター付けられることが分かる．実は，$\mathbb{P}^4$ の直線に対応する点 $[l]\in$ G(2,5) が X に含まれることと，$l\subset Q_A$ となる $[A]\in P$ が射影平面でパラメーター付けられることは同値であることが分かる．

P_x と H の交わり $\overline{C}_x$ を考えると，これは，射影平面 P_x における5次曲線である．詳しく調べてみると，この Y における逆像は2つの曲線 C_x と C'_x に分解していて，それぞれ $\overline{C}_x$ と双有理同値であることが分かる．さらに，X の一般点 x に対しては，$\overline{C}_x$ は通常2重点を3つ持ち，C_x と C'_x はその非特異モデルであることも分かる．よって，C_x と C'_x の種数は3である．$\overline{C}_x$ が5次曲線なので，C_x と C'_x の次数も5である．こうして，X によってパラメーター付けされる2つの種数3，次数5の曲線族 $\{C_x\}_{x\in X}$ と $\{C'_x\}_{x\in X}$ が得られた．この平坦族の1つを用いたFM変換によって，X と Y が導来同値であることが示される．

一般に，CY 3様体において，与えられたホモロジー類を持つ曲線のパラメーター空間のオイラー数を表すと考えられているのが，**BPS数**（Gopakumar-Vafa不変量）である．ミラー対称性を用いて，X と Y 上の様々な曲線のBPS数を計算することができる[4]．それによると，Y 上の種数3，次数5の曲線のBPS数は100となっており，これは X のオイラー数の2倍と思うことで，上記の2つの曲線族と読むことができる．他のいくつかのBPS数も X と Y の射影幾何を用いて解釈できて興味深い[4]．

■ 8. CY 3様体を越えて ■

向井氏が等質空間の線形切断に辿り着いたもう1つの動機は，3次元Fano多様体（以下，**Fano 3様体**）の分類問題である．大雑把に言えば，n 次元**Fano多様体**とは大域的な多重テンソル正則 n ベクトル場が十分たくさん存在する非特異 n 次元射影多様体のことである．上記の G/P はFano多様体の代表例である．この例では，1点での接ベクトルが群作用によって大域的ベクトル場を生成するので，大域的正則ベクトル場が十分たくさん存在している．また，1-パラメーター部分群の像としてたくさんの有理曲線が存在する，従って，全体的に正に曲がった多様体であることも分かる．実はどんなFano多様体もたくさんの有理曲線を含んでいるという森重文氏の大発見がある（氏のフィールズ賞受賞につながった森理論の誕生）．

Fano 3様体の場合，その分類理論はイタリア人Fano（1871–1952）によって創始され，ロシアのIskovskikhによって完成された．Fano 3様体の中で，等質空間の線形切断として得られるFano 3様体，それは $K3$ 曲面の例に対応して4つ見つかるが，それらがFano 3様体全体の中で中核部分をなしているということを，向井氏は明らかにして，Fano 3様体の分類理論を洗練させ究極のものとした[3]．$K3$ 曲面にとっては（興味深いものの）例の一部に過ぎないものが，Fano 3様体にとっては中核部分をなすのである．

さらに向井氏は，G/P の線形切断である Fano 3 様体 X についても，それを直交線形切断と関係づけて研究した．例えば，$G/P = \mathrm{OG}(5,10)$ の場合，直交線形切断は種数 7 の曲線となり，向井氏は，X の中間次元 Jacobi 多様体と C の Jacobi 多様体が同型であることを示した．

■ 9. ホモロジー的射影双対性 ■

線形切断として得られる $K3$ 曲面や Fano 3 様体の向井氏による研究を，導来圏の観点から発展させたのが，Kuznetsov 氏の**ホモロジー的射影双対**の理論である．Kuznetsov 氏は，射影多様体 $\Sigma \subset \mathbb{P}(W)$ に対して，ホモロジー的射影双対 $\check{\Sigma} \subset \mathbb{P}(W^*)$ を定義した．ただし，射影双対とは違い，その存在は一般には分かっていない．射影双対に一致することもある．もし，$\check{\Sigma}$ が存在すれば，Σ の線形切断 $\Sigma \cap \mathbb{P}(L)$ とその直交線形切断 $\check{\Sigma} \cap \mathbb{P}(L^{\perp})$ の導来圏の間の関係が組織的に明らかになるしくみになっている．例えば，この枠組みの中で，Kuznetsov 氏は，Fano 3 様体 $X = \mathrm{OG}(5,10) \cap \mathbb{P}(L)$ と直交線形切断である種数 7 の曲線 C について，$\mathcal{D}^b(C)$ から $\mathcal{D}^b(X)$ への充満忠実な関手 Φ が存在して，$\Phi(\mathcal{D}^b(C))$ が $\mathcal{D}^b(X)$ の半直交成分になることを示した．

この枠組みの中で，我々の研究した $\mathscr{X}$ と $\mathscr{Y}$ を調べるのは今後の興味深い課題である．その際に上記で構成した種数 3，次数 5 の曲線が再び重要な役割を果たすであろう．

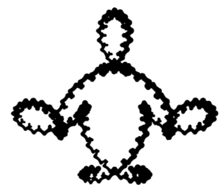
参考文献

1) 特集「導来圏をめぐって」，数理科学 2012 年 8 月号．
2) 向井茂，「$K3$ 曲面上のベクトル束のモジュライとシンプレクティック多様体」，数学 **39** 巻．
3) 向井茂，「Fano 多様体論の新展開」，数学 **47** 巻．
4) S. Hosono and H. Takagi, Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruences I, to appear in *Journal of Algebraic Geometry.*
5) S. Hosono and H. Takagi, Determinantal quintics and mirror symmetry of Reye congruences, arXiv: 1208.1813.
6) S. Hosono and H. Takagi, to appear in arXiv.

（たかぎ・ひろみち，東京大学大学院数理科学研究科）

シューベルト・カルキュラス

ベクトル束の一般退化跡公式



池田　岳

1. はじめに—言葉の違いから生まれる楽しみ

K 氏と会って話したかった．ある多項式族の幾何へのうまい応用を見つけたと思っていたのだが，かなり後になって，彼が本質的に同じ計算をしていたことに気がついたからである．文脈も手法も違うけれど，まぎれもなく同じ公式なのだ．メールを書いても返事がなかったので，3 年くらいそのままになっていた．

昨年の 7 月に大阪でシューベルト・カルキュラスの集会を開いて，彼を招くことができた．私の話を聴いて「まったく異なる言葉*1)が使われているけれど，とてもよくわかる」と言ってくれたし，私も彼の講演を言葉の違いゆえにいっそう楽しんだ．

本稿では，彼の言語である**ベクトル束の退化跡**を用いて，**二重シューベルト多項式**について解説してみたい．そう思ったのは，最近になって K 氏の仕事を再解釈して発展させる Anderson と Fulton の結果[1]が現れたからである．

2. グラスマン多様体（線形代数の復習）

退化跡の話につなげるため，グラスマン多様体について基本的なことを説明する．シューベルト・カルキュラスの教科書として Fulton[2] と Manivel[5] を挙げておく．

*1)　totally different language.

2.1 掃き出し法からはじめよう

ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 内の k 次元線形部分空間 V を考える．このような V 全体のなす集合を**グラスマン多様体**と呼んで $\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n)$ と表す．まず $\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n)$ の「点」V を一つ指定するとはどういうことか考えよう．V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ を選び n 行 k 列の行列 $A=(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$ を作ろう．与えられた V に対して，行列 A の決まり方は基底変換の分だけ不定性があるから標準化することを考える．基底変換とは A に対して右から k 次正則行列を掛けることであって，それは列基本変形の繰り返し，すなわち掃き出し法によって達成される．ここでは以下のような階段形（いわゆる簡約行列）にすることを考える：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

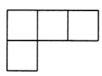
左の行列の形は掃き出しの要（かなめ）に使う 1 が左上から順調にナナメ一直線に並んでいる．一般には右の行列のように「要の 1」は基準の位置（i 列目なら i 行目）から下にガタガタとずれる．

与えられた V に対して，このように標準化された行列は（$*$ に入る数も込めて）一意的に決まるから，集合 $\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n)$ は，このように標準化された行列全体と一対一に対応する．

2.2 シューベルト胞体

簡約行列の階段のガタガタの「形」を非負整数の列 $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0)$ を用いて表すのが便利である．右から i 列目の要の 1 が基準の位置から λ_i だけ下がったところにあるとする．上の例では λ は左のほうが基準の位置なので $(0,0,0)$ で，右のほうが $(3,1,0)$ である．一般に $n-k \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$ である．

λ を以下のような箱の集まりによって表すと便利なことが多い．$\lambda = (3,1,0)$ ならば



と図示する．これを**ヤング図形**と呼ぶ．1 行目に λ_1 個の箱，2 行目に λ_2 個の箱という具合に左詰めで箱を配置する．縦が k で横が $n-k$ の長方形に含まれるヤング図形の分だけ，全部で ${}_n\mathrm{C}_k$ 個「形」がある．なお，λ もしくは対応するヤング図形のことを**分割**（partition）とも呼ぶ．0 でない成分の個数を分割 λ の**長さ**という．

さて「λ 型」の簡約行列全体の集合を Ω_λ° で表し**シューベルト胞体**と呼ぶ．これはアフィン空間 $\mathbb{C}^{(n-k)k-\sum_{i=1}^k \lambda_i}$ である．特に $(0,\ldots,0)$ に対応するヤング図形を $\emptyset$ で表すとき $\Omega_\emptyset^\circ$ の次元は $(n-k)k$ であって，これが唯一の最大次元の胞体である．以上をまとめると，グラスマン多様体*2) がシューベルト胞体による分割 $\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n) = \bigsqcup_\lambda \Omega_\lambda^\circ$ を持つといえたことになる．

2.3 シューベルト多様体

シューベルト胞体の閉包 $\Omega_\lambda = \overline{\Omega_\lambda^\circ}$ を**シューベルト多様体**と呼ぶ．Ω_λ も胞体分割されて

$$\Omega_\lambda = \bigsqcup_{\mu \supset \lambda} \Omega_\mu^\circ$$

となっていることがわかる．$\mu \supset \lambda$ はヤング図形としての包含を意味する．胞体 Ω_λ° の境界に余次元の高い胞体がいくつか付いてシューベルト多様体ができあがっている．

もっと直接的に線形代数的な条件でシューベルト多様体を定めることもできる．線形部分空間の列

$$F_\bullet : 0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = \mathbb{C}^n$$

を任意に選ぶ．ただし，ここで $\dim(F_j) = j$ とする．このような $F_\bullet$ を**旗**と呼ぶ．このとき

$$\dim(V \cap F_{n-k+i-\lambda_i}) \geq i \quad (1 \leq i \leq k)$$

をみたす $V \in \mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n)$ の全体を $\Omega_\lambda(F_\bullet)$ とおく．$\Omega_\lambda(F_\bullet)$ は余次元 $|\lambda|$ の既約部分多様体である．特に F_j を下から j 個の座標に対応する座標部分空間と選ぶとき $\Omega_\lambda(F_\bullet)$ は上で定めた Ω_λ と一致する．

V が基準として選んだ旗 $F_\bullet$ に対してどういう位置関係にあるか，いわば**寄り添い具合**を表すデータが λ である．一般に λ の箱の個数が多いほど V に課せられる条件は強く（余次元は高く），$\lambda \subset \mu$ の場合 $\Omega_\mu \subset \Omega_\lambda$ であることにも注意しておこう．箱の個数が最大である $\lambda = (n-k)^k$（縦が k，横が $n-k$ の長方形）の場合は $\dim(V \cap F_k) \geq k$ という条件を含むから $V = F_k$ つまりシューベルト多様体は 1 点集合になる．

2.4 シューベルト類

部分多様体 $\Omega_\lambda(F_\bullet)$ が定めるコホモロジー類 $[\Omega_\lambda(F_\bullet)]$ は旗 $F_\bullet$ の選び方によらない．この類を σ_λ で表し**シューベルト類**と呼ぶ．コホモロジー環*3) $H^*(\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n))$ は ${}_n\mathrm{C}_k$ 個のシューベルト類 σ_λ が生成する自由 $\mathbb{Z}$ 加群である：

$$H^*(\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}\sigma_\lambda.$$

シューベルト類どうしの積をシューベルト類の線形結合に表すことができる：

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu \sigma_\nu.$$

積の構造係数 $c_{\lambda\mu}^\nu$ を求めることは，シューベルト・カルキュラスの基本問題である．古典的な数え上げ幾何の問題の基礎になる．後述するシューア関数との関係を用いることにより，$c_{\lambda\mu}^\nu$ の組合せ論的な記述が可能である．本稿では，その方面の説明は一切省く．Fulton の本[2] を参照されたい．

*2) 非特異で射影的な代数多様体の構造を持つ．

*3) 本稿において，コホモロジーはすべて $\mathbb{Z}$ 係数とする．

3. 分類写像とチャーン類

ここでチャーン類の復習をしておこう．$\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n)$ 上には**普遍束**（同語反復束）と呼ばれる階数 k のベクトル束 S がある．これは自明束の部分束であって次のように定義される：

$$S=\{(v,V)\in\mathbb{C}^n\times\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n)\mid v\in V\}.$$

普遍束 S は $\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n)$ の n に関する帰納極限 $\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^\infty)$ 上でも意味を持つ．コホモロジー環 $H^*(\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^\infty))$ は k 変数の多項式環 $\mathbb{Z}[\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_k]$ と同型（$\boldsymbol{c}_i$ は $2i$ 次）であることが知られている．

さて，X を複素多様体として $V\to X$ を階数 k の複素ベクトル束とする．このとき，**分類写像**と呼ばれる写像 $\rho:X\to\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^\infty)$ であって $V\cong\rho^*S$ となるものがホモトピーを除いて一意的に存在する．ここで

$$c_i(V)=\rho^*(\boldsymbol{c}_i)\in H^{2i}(X)$$

を V の i 次**チャーン類**と呼ぶ．定義から $\boldsymbol{c}_i=c_i(S)$ が従う．あとで使うチャーン類の基本的な性質を2つだけ挙げておく．

（その1） s を V の“一般的な”切断とするとき零点集合 $Z(s)=\{x\in X\mid s(x)=0\}$ が定める類 $[Z(s)]$ は最高次チャーン類 $c_k(V)$ と一致する．
（その2） チャーン類の総和 $c(V)=\sum_{i=0}^k c_i(V)$ を**全チャーン類**と呼ぶ．X 上の複素ベクトル束の完全列 $0\to V_1\to V_2\to V_3\to 0$ が与えられたとき

$$c(V_2)=c(V_1)c(V_3)$$

が成り立つ．これを**ホイットニーの和公式**と呼ぶ．

全チャーン類の形式的な逆 $c(V)^{-1}$ を $c(-V)$ と書く．例えば $c(V_3)=c(V_2-V_1)$ などのような記法も後ほど多用する．

4. シューア関数

長さが k 以下の任意の分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ に対し，シューベルト類 $\sigma_\lambda\in H^*(\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^n))$ の極限として $H^*(\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^\infty))$ の元を定めることができる．これを同じ記号で σ_λ と表す．チャーン類は符号を除き特殊なシューベルト類と一致する：

$$\boldsymbol{c}_i=(-1)^i\sigma_{1^i}\quad(1\le i\le k).$$

ここで 1^i は1が i 個という分割を表している．

一般のシューベルト類の姿を説明するために，対称式の基本定理を思い出そう．k 変数多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_k]$ に変数の置換として k 次対称群 S_k が作用しているものとする．このとき

$$\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_k]^{S_k}=\mathbb{Z}[e_1,\ldots,e_k]$$

が成り立つ．左辺は S_k の作用に関する不変部分環である．ここに $e_1,\ldots,e_k$ は**基本対称式**と呼ばれ，母関数を使って

$$\prod_{i=1}^k(1+x_i)=\sum_{i=0}^k e_i$$

と定義される．e_i は多項式としての i 次斉次部分である．基本対称式と対をなして基本的な**完全対称式** h_i $(i\ge 0)$ を次で導入する：

$$\prod_{i=1}^k(1-x_i)^{-1}=\sum_{i=0}^\infty h_i.$$

定理1（Giambelli 公式） シューベルト類 σ_{1^i} と基本対称式 e_i $(1\le i\le k)$ を同一視することにより $H^*(\mathbf{Gr}(k,\mathbb{C}^\infty))=\mathbb{Z}[e_1,\ldots,e_k]$ とみなす．このとき $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ に対して次が成り立つ：

$$\sigma_\lambda=\det(h_{\lambda_i+j-i})_{k\times k}.$$

右辺の行列式として定義される対称関数は**シューア関数**と呼ばれ，一般線形群および対称群の既約指標を与える．表現論に表れる指標がシューベルト類と一致する「理由」は実はあまりちゃんとわかっていない．

わかりたくてもわからないので Giambelli 公式を様々な形で拡張し，組合せ論を展開したり，幾何学に応用したり，どこまでできるかできるところまでやってみるか，という気になる．その一例

として，Fulton による一般退化跡公式を紹介する（もっとも，Fulton 先生がどういう気でやっておられるかは聞いたわけではない）．

5. 二重シューベルト多項式と一般退化跡公式

5.1 Fulton の一般退化跡公式

X を非特異な代数多様体として X 上の階数 n のベクトル束 V を考える．部分束の旗

$$E_\bullet : V = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots,$$
$$F_\bullet : 0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$$

であって E_i の余階数が i，F_i の階数が i であるものを考える．

Fulton の公式では，2 つの旗 $E_\bullet, F_\bullet$ のファイバーの“寄り添い具合”を表すのに置換を用いる．置換 $w \in S_n$ に対し**一般退化跡** Ω_w を，条件

$$\dim(E_p(x) \cap F_q(x)) \geq \#\{i > p \mid w(i) \leq q\}.$$

をみたす $x \in X$ 全体がなす X の部分多様体であると定義する．

例：$n = 3$ とする．$E_\bullet$ を基準とするとき各 $w \in S_3$ で指定される $F_\bullet$ の相対的な位置関係を図示すると図 1 のようになる．E_1, E_2 をそれぞれ V, ℓ で

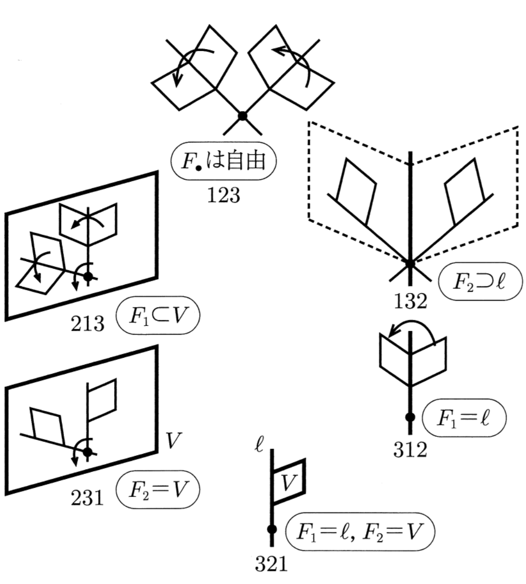


図 1

表す．

旗 $E_\bullet, F_\bullet$ が十分一般であると仮定するとき，Ω_w の余次元は置換 w の**転倒数** $\ell(w)$ と一致する．ここで w の転倒数とは，ペア $i < j$ であって $w(i) > w(j)$ となるものの個数をいう．さて

$$x_i = c_1(E_{i-1}/E_i), \quad y_j = c_1(F_j/F_{j-1})$$

とおくとき退化跡の類 $[\Omega_w] \in H^{2\ell(w)}(X)$ を x, y の多項式として書き表すことができる．その多項式は多様体 X やベクトル束 V の詳細にはよらず，普遍的な姿をしている．

定理 2（Fulton の一般退化跡公式）

$$[\Omega_w] = \mathfrak{S}_w(x, y).$$

$\mathfrak{S}_w(x, y)$ $(w \in S_n)$ は**二重シューベルト多項式**と呼ばれる $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ の元で，以下のように定義される：S_n は $x_1, \ldots, x_n$ を置換することにより多項式に作用するものとする．特に互換 $s_i = (i, i+1)$ は x_i と x_{i+1} を入れ替える．上記の多項式環上に**差分商作用素** ∂_i を

$$\partial_i f = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$$

と定める．次の性質が二重シューベルト多項式を特徴付ける：

$$\partial_i \mathfrak{S}_w(x, y) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i}(x, y) & (w(i) > w(i+1)) \\ 0 & (w(i) < w(i+1)) \end{cases}.$$

ただし $w_0 \in S_n$ を $w_0(i) = n - i + 1$ と定めるとき $\mathfrak{S}_{w_0}(x, y) = \prod_{i+j \leq n}(x_i - y_j)$ とする．

5.2 旗型置換（vexillary permutation）

置換 w が**旗型**（**vexillary**）であるとは

$$a < b < c < d \text{ かつ } w(b) < w(a) < w(d) < w(c)$$

ということが起きないことをいう．旗型置換に対応する二重シューベルト多項式は行列式の形に明示的に書ける（Macdonald）．この事実に対する Anderson–Fulton[1] による「幾何的な」別証明を紹介する．

自然数の列の三つ組

$$k_1 < \cdots < k_s, \ p_1 \geq \cdots \geq p_s, \ q_1 \leq \cdots \leq q_s$$

を考える．これらの列には以下の条件を課す：$k_i \le q_i$ $(1 \le i \le s)$ および $(p_i - p_{i+1}) + (q_{i+1} - q_i) > k_{i+1} - k_i$ $(1 \le i \le s-1)$，そして $p_s - q_s + k_s > 0$.

三つ組 (k,p,q) のデータから，ある旗型置換 $w(k,p,q)$ が定義される．$w(k,p,q)$ の定義は複雑なのでここでは省略するが，対応する退化跡 $\Omega_{w(k,p,q)}$ は次の条件により与えられる：

$$\dim(E_{p_i} \cap F_{q_i}) \ge k_i \quad (1 \le i \le s).$$

三つ組 (k,p,q) から分割（ヤング図形）を作る．まず $r = k_s$ とする．$\lambda_{k_i} = p_i - q_i + k_i$ $(1 \le i \le s)$ として λ_{k_1} を k_1 回，λ_{k_2} を $k_2 - k_1$ 回，$\cdots$，λ_{k_s} を $k_s - k_{s-1}$ 回並べてできる分割を λ とする．

さらに，まず

$$a(k_i) = \prod_{j=1}^{p_i}(1+x_j) / \prod_{k=1}^{q_i}(1+y_k)$$

とおき，$a(k_1)$ を k_1 回，$a(k_2)$ を $k_2 - k_1$ 回，$\cdots$，$a(k_s)$ を $k_s - k_{s-1}$ 回だけこの順に並べた列を $a(1),\ldots,a(r)$ とする．$a(i)$ を x,y の冪級数として展開したときの j 次斉次部分を $a(i)_j$ と表す．基本対称式と完全対称式を用いて具体的に書ける．以上の記号の下に次が成り立つ：

定理 3 $[\Omega_{w(k,p,q)}] = \det(a(i)_{\lambda_i + j - i})_{r \times r}$.

古典的な退化跡公式を含む一般的な退化跡公式である．退化跡に関する専門書としては Fulton–Pragacz[3]がある．歴史や応用にも詳しい．

5.3 定理 3 の証明

証明の前に，ホイットニーの和公式から

$$c(V - E_p) = \prod_{i=1}^{p}(1+x_i), \quad c(F_q) = \prod_{j=1}^{q}(1+y_j)$$

が従うことと，次を確認されたい：

$$a(k_i) = c(V - E_{p_i} - F_{q_i}).$$

（第一段） $q_i = k_i = i$ $(1 \le i \le s)$ の場合：$\dim(E_{p_i} \cap F_i) \ge i$ は F_i が E_{p_i} に含まれるという条件である．F_1 が E_{p_1} に含まれるという条件は $F_1 \to V \to V/E_{p_1}$ がゼロであること，言い換えると $\mathrm{Hom}(F_1, V/E_{p_1})$ の切断として消えるという条件と同値なので最高次のチャーン類 $c_{p_1}(F_1^* \otimes V/E_{p_1})$ により与えられる．F_2/F_1 から V/E_{p_2} への写像が消える条件は $c_{p_2}((F_2/F_1)^* \otimes V/E_{p_2})$ により与えられる．これを繰り返せば

$$[\Omega_{w(k,p,q)}] = \prod_{i=1}^{s} c_{p_i}((F_i/F_{i-1})^* \otimes V/E_{p_i})$$

が得られる．ここでテンソル積のチャーン類の公式を使って

$$c((F_i/F_{i-1})^* \otimes V/E_{p_i}) = \prod_{j=1}^{p_i}(1 + x_j - y_i)$$

と計算できる．p_i 次は最高次数なので

$$[\Omega_{w(k,p,q)}] = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{p_i}(x_j - y_i) \qquad (1)$$

を得る．次に (1) が多項式として

$$\det(c_{p_i+j-i}(V - E_{p_i} - F_i))_{s \times s}$$

と一致することを示す．行列式の中身の行列に (i,j) 成分が $c_{j-i}(F_{j-1})$ という行列を右から掛ける．これは対角成分がすべて 1 の上三角行列である（掃き出し法！）．“ホイットニーの和公式”

$$c(V - E_{p_i} - F_i)c(F_{j-1}) = c(V - E_{p_i} - F_i + F_{j-1})$$

を行列の掛け算と読み替えると，掛け算で得られる行列の (i,j) 成分は

$$c_{p_i+j-i}(V - E_{p_i} - F_i + F_{j-1})$$

と求まる．この行列の対角成分の積は (1) と一致する．また，対角よりも上の成分は次数の関係から 0 になることがわかる．行列の積の行列式をとれば欲しい等式が得られる．

（第二段） $k_i = i$, q_i は任意の場合：X 上の旗 $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_s$（$D_i$ の階数は i）であって $D_i \subset F_{q_i}$ をみたすもののなす多様体を Y とする．Y は X 上の旗束（flag bundle）である．D_i が E_{p_i} に含まれる条件で定まる退化跡を Y において考えると，それは第一段で考えたタイプのものであり，対応する類は行列式で表せる．その退

化跡の $\pi : Y \to X$ による像は $\Omega_{w(k,p,q)}$ と双有理的である．ギシン準同型 π_* による像は

$$\begin{aligned}&\pi_*(\det(c_{p_i+j-i}(V - E_{p_i} - D_i)))\\ = &\det(c_{\lambda_i+j-i}(V - E_{p_i} - F_{q_i}))\end{aligned}$$

と計算される．

(第三段) 一般の場合は k_i と k_{i+1} の間に自然数を挿入し，$k_i = i$ の場合に帰着できる．詳細は省略する．□

6. 対称性のあるベクトル束の退化跡公式

対称性付きのベクトル束，特に C 型，すなわちシンプレクティック構造付きのベクトル束の退化跡公式について述べる．

X 上に階数 $2n$ のベクトル束 V とそのシンプレクティック構造が与えられているとする．すなわち $\bigwedge^2 V^*$ の至るところ非退化な切断が与えられているとする．E, F を V のラグランジアン部分束とし $Q = c(V-E-F)$ とおく．シンプレクティック構造による同一視で $V/E \cong E^*$, $V/F \cong F^*$ なので $Q = c(E^* - F) = c(F^* - E)$ と2通りの書き換えができる．このことから，関係式 $Q \cdot Q^* = 1$ が従う．$Q = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$ とすれば

$$Q_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i}(-1)^j Q_{i+j}Q_{i-j} = 0 \quad (i \geq 1)$$

という関係式を得る．Q_i を不定元とみて，左辺の多項式たちで生成されるイデアルによる $\mathbb{Z}[Q_1, Q_2, \ldots]$ の剰余環を Γ と定義*4)する．そうすれば，Q_i に $c_i(V - E - F)$ を代入することにより環準同型 $\Gamma \to H^*(X)$ が定まる．

旗 $E = E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, $F = F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ をとり $x_i = c_1(E_i/E_{i+1})$, $y_i = c_1(F_i/F_{i+1})$ とおく．E_i, F_i はそれぞれ E, F に対する余階数が $i - 1$ であるとする．

*4) Γ は Schur Q-関数を基底に持つ環である．Q-関数について書きたいことは山ほどあるが….

*5) 紙面の都合で B, C, D 型の旗型（vexillary）の定義は割愛する．原論文[1)] 参照．

定理 4（Anderson–Fulton[1)]） ワイル群の元 $w \in W$ が旗型*5)であるとする．w から，ある狭義分割 $\lambda = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$ および自然数 p_i, q_i $(1 \leq i \leq r)$ が定まって以下が成り立つ：

$$a(k_i) = Q \cdot \prod_{j=1}^{p_i-1}(1 + x_j) \prod_{k=1}^{q_i-1}(1 + y_k)$$

とおき，5.2 節と同様に $a(1), \ldots, a(r)$ を定めると

$$[\Omega_w] = \mathrm{Pf}_\lambda(a(1), \ldots, a(r)).$$

右辺は (i, j) 成分が以下で与えられる行列の Pfaffian である：

$$a(i)_{\lambda_i}a(j)_{\lambda_j} + 2\sum_{l=1}^{\lambda_j}(-1)^l a(i)_{\lambda_i+l}a(j)_{\lambda_j-l}.$$

また $\mathrm{Pf}_\lambda(a(1), \ldots, a(r))$ を $\Gamma[x, y]$ の元とみなすとき C 型二重シューベルト多項式[4)] $\mathfrak{C}_w(x, y)$ と一致する．

7. おわりに

気取った書き出しは失笑を買ったかもしれない．K 氏とは M. Kazarian である．なぜ彼の公式は私が見つけた公式と一致しているのか，最近ようやくわかりかけてきた．近頃は，異言語間コミュニケーションこそ数学の醍醐味かもしれないと思う．

参考文献

1) D. Anderson, W. Fulton, Degeneracy loci, Pfaffians, and Vexillary signed permutations in types B, C, and D, preprint, arXiv:1210.2066.
2) W. Fulton, *Young tableaux*, London Math. Soc. Student Texts 35.
3) W. Fulton, P. Pragacz, *Schubert varieties and degeneracy loci*, Lecture Notes in Mathematics 1689, Springer.
4) T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, *Adv. Math.* **226** (2011) 840–886.
5) L. Manivel, *Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci*, SMF/AMS Texts and Monographs vol.6.

（いけだ・たけし，岡山理科大学理学部）

量子コホモロジー

それは何の理論か？



A.N. Kirillov
（訳／前野 俊昭）

1. 序

量子コホモロジー理論（以下 QChT）は2つの起源を持つ新しい数学の分野である．一つの起源は，1990年4月にハーバード大学で行われた2次元位相重力に関する E. Witten の2つの講義[20]であり，もう一つは80年代初めに M. Gromov が発展させたシンプレクティック幾何における擬正則曲線の理論[9]である．著者が知る限り，初めて「量子コホモロジー環」の名称が使われたのは Witten の論文 20)，C. Vafa の論文 19) が出た1990年頃のことである．QChT の数学的な構成は，1992年に Y. Ruan と G. Tian[18]により，ある特別なクラスのシンプレクティック多様体に対してなされた．それとは独立に，M. Kontsevich と Yu. Manin[14]により QChT が満たすべき公理系も同時期に提案された．その後 Kontsevich-Manin の公理系を満たす理論の実例が代数的カテゴリー，シンプレクティックカテゴリーの双方において構成されている．文献 2), 6), 17) などを参照されたい．

QChT の基礎となるのは Gromov-Witten 不変量（以下 GW 不変量）の理論である．手短に言えば，GW 不変量を用いると結合則を保ったままシンプレクティック多様体の古典的コホモロジー環の積構造を変形することができる．この変形された積（即ち量子積）の結合則は，問題となっているシンプレクティック多様体の擬正則曲線の数に関して非自明な情報を与える．より正確には，種数0の n 点 GW 不変量（$n \geq 3$）をすべてまとめ上げる形で Gromov-Witten ポテンシャル（以下 GW ポテンシャル）が定義され，量子積の結合則の重要な帰結として GW ポテンシャルが Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde（WDVV）系という3階の微分方程式系を満たすことが示される．WDVV 方程式は GW 不変量に関する一連の漸化式を与える．さらに，GW ポテンシャルが位相的漸化式（topological recurrance relation）[7, 11]と呼ばれる関係式を満たすことから，GW 不変量がまた別の種類の関係式を満たすことも示される．例えば $\mathbf{P}^2$ のような最も簡単な場合には，上記2種類の関係式が GW 不変量を一意的に決定してしまう．一方，文献 14), 18) でも指摘されているように，QChT の選択に応じて代数的カテゴリーにおける GW 不変量は，標的空間中で旗や接条件（tangency）などに関する特定の条件を満たすような曲線の数をカウントしたものともなり得る．結論として，文献 14), 18) での観察は $\mathbf{P}^2$ 上の有理曲線の特性数[*1)]の計算に関する数え上げ代数幾何学の古典的問題（例えば文献 21) 参照）の解を導くことになる．$\mathbf{P}^2$ 上の一般の位置にある $(3d-1)$ 点を通る d 次有理曲線の本数についての漸化式の発見とその証明は，Kontsevich によりなされた重要な業績で

*1)　$a+b+2c=3d-1+g$ のとき特性数 $N_d^{(g)}(a,b,c)$ とは，種数 g の d 次平面曲線であって，一般の位置の a 個の与えられた点を通り，一般の位置の b 本の与えられた直線に接し，一般の位置の c 本の与えられた直線に指定された点で接するようなものの本数である．

である．有理曲線に関しては，すべての特性数が R. Pandharipande により計算されている（文献 7), 5), 11) 参照）．任意の種数の特性数問題の解は代数幾何的手法を用いて 3) で得られている．平面曲線に対する種数 0 の特性数を計算するためのトロピカル・アプローチは 1) で展開されており，こうしたアプローチは Gromov-Witten 理論とトロピカル幾何との深い結び付きを示唆している（例えば文献 10) 参照）．

QChT を数え上げ幾何，2 次元重力その他の物理の諸分野に応用するに際しては，「適切な」GW ポテンシャルを得るためにすべての n について n 点 GW 不変量を考慮に入れなくてはならない．こうしてすべての n 点 GW 不変量を含めて得られる量子コホモロジー環は大きな（big）量子コホモロジー環と呼ばれる．（スムーズかつ射影的な）代数多様体の大きな量子コホモロジー環を具体的に記述することは非常に困難で，著者の知る限りでは今でも $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$ 程度の場合に具体的記述が得られているのみである．

ある多様体のコホモロジー環の古典的な積構造の変形が 3 点 GW 不変量だけを用いて定義されている場合，対応する量子コホモロジー環は小さな（small）量子コホモロジー環と言われる．詳細は第 3 節を参照されたい．多様体の小さな量子コホモロジー環は概して計算しやすいが，依然興味深い情報を保持している．とりわけグラスマン多様体や古典型の旗多様体の小さな量子コホモロジー環は詳しく研究されている（例えば文献 8) 参照）．小さな量子コホモロジー環の膨大な応用例は最近の論文 16) に見出せる．さらに，代数幾何，表現論，可積分系などへの様々な応用において，重力（小）量子コホモロジーが現れる．重力量子コホモロジー（gravitational quantum cohomology）とは，QChT に重力ディセンダント（gravitational descendant）たちを付け加えて得られるものである（例えば文献 8) 参照）．

最後にこの記事のカバーする内容について簡単に述べておく．この記事は Gromov-Witten 理論に関する幾つかの基礎事項の定義や応用，量子コホモロジー環の核心部分に限って概説したものであり，ここで紹介した結果の証明については割愛した．また，Frobenius 多様体，Dubrovin 接続，位相的漸化式，Virasoro 条件，仮想基本類，トートロジー類と psi 類，Witten 予想，楕円種数，戸田方程式，Whittaker 関数，Hurwitz 数，その他多くの重要事項についても省略した．数え上げ代数幾何，シンプレクティック幾何，表現論，可積分系，共形場理論，弦理論など数学と物理学の様々な分野での数多くの一般化と応用に関しては既に膨大な文献が存在しているが，まずは文献 14), 12), 8), 17) などをお勧めしたい．さらに進んだ内容に関しては，文献 20), 1), 4), 6), 7), 10), 16) がある．

2. Gromov-Witten 不変量

ここでは簡単のため，種数 0 の GW 不変量のみを代数的カテゴリーにおいて論じることにする．ナイーヴな定義は次のようなものである．X をスムーズな射影的多様体とし，$\beta \in H_2(X, \mathbf{Z})$ を 2 次のホモロジー類とする．n 点付き非特異有理曲線から多様体 X への正則写像のモジュライ空間

$$\mathcal{M}_{0,n}(X,\beta) = \{((C, x_1, \ldots, x_n), \phi) \mid \phi_*([C]) = \beta\}/\sim$$

を考えよう．ここで，C は種数 0 の非特異有理曲線，$x_1, \ldots, x_n$ は C 上の互いに異なる点であり，ϕ は C から X への正則写像である．記号 $\sim$ は，$\theta(C) = C'$, $\theta(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$ かつ $\psi \circ \theta = \phi$ であるような同型写像 $\theta : C \to C'$ が存在するとき，

$$(C, x_1, \ldots, x_n, \phi) \sim (C', y_1, \ldots, y_n, \psi)$$

と定めた同値関係を表している．また，

$$ev_i((C, x_1, \ldots, x_n, \phi)) = \phi(x_i)$$

により，評価写像（evaluation map）$ev_i : \mathcal{M}_{0,n}(X,\beta) \to X$ が定まる．コホモロジー類 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H^*(X, \mathbf{Q})$ に対し，X の部分多様体 $A_1, \ldots, A_n \subset X$ で，それらのホモロジー類 $[A_i]$ が α_i のポアンカレ双対となっているようなもの

を取る．GW 不変量 $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_{0,n,\beta}$ の候補として考えられるのは，もし有限の値であれば，交点の数

$$\#(ev_1^{-1}(A_1) \cap ev_2^{-1}(A_2) \cap \cdots \cap ev_n^{-1}(A_n))$$

であって，これが有限の値とならないときは 0 と考える．

このナイーヴな定義を正確なものとするには，多くの技術的な問題を解決する必要がある．まず一般にモジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,n}(X,\beta)$ は非コンパクトであり，可約にもなり得る．また，異なる次元の既約成分を持つかも知れず，他にも悪い性質を持つ可能性がある．非コンパクトな空間上で合理的な交差理論を定義するということも，やはり一つの問題点となる．そこで，まずはモジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,n}(X,\beta)$ のコンパクト化を構成する必要がある．このようなコンパクト化の一つの構成方法は Kontsevich[13] により提案された．そのアイデアは Witten に遡るもので，結節点（通常二重点）を持つような有理曲線を付け加えるというものである．つまり，算術種数 0 の安定写像のモジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)$ を考えるということになる．

定義 1 C を結節点のみを持つ算術種数 0 の代数曲線とし，$x_1, \ldots, x_n \in C$ を互いに異なる非特異点とする．n 点付き曲線 $(C, x_1, \ldots, x_n)$ が安定であるとは，C の各既約成分が，結節点か x_i のいずれかの点を少なくとも 3 点含むことである．

安定曲線の基本的な性質は，有限な自己同型群しか持たないことである．

定義 2 正則写像 $\phi : (C, x_1, \ldots, x_n) \to X$ が安定写像であるとは，ϕ により一点にうつされるような C の連結成分が安定な点付き曲線となることである．

モジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)$ 上の交差理論を論じるに当たって必要な，いわゆる仮想基本類の存在に関わる技術的な問題を避けるため，ここでは X をある半単純リー群の等質空間と仮定して話を進める．例えば，$X = \mathbf{P}^n$ や，一般化された旗多様体 G/P である．

定理 1（Kontsevich） G を半単純リー群とし，$P \subset G$ をその放物型部分群とする．X を等質空間 G/P とするとき，モジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)$ は純 $\dim(X) + n - 3 + \langle \beta, c_1(X) \rangle$ 次元のスムーズな射影的代数多様体となる．ここで，$c_1(X)$ は X の第一チャーン類を表す．

ここで，Gromov-Witten 不変量を多重線型写像 $\langle\ \rangle_{0,n,\beta} : H^*(X, \mathbf{Q})^n \to \mathbf{Q}$ として次のように定める．

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_{0,n,\beta} \\ &:= \prod_{j=1}^{n} ev_j^*(\alpha_j) \cap [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)] \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)} ev_1^*(\alpha_1) \cap \cdots \cap ev_n^*(\alpha_n). \end{aligned}$$

次の命題は上述のナイーヴな定義がほとんど正しいものであることを示している．

命題 1 $A_1, \ldots, A_n$ を一般化された旗多様体 G/P の閉部分多様体とし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H^*(G/P, \mathbf{Q})$ をそれらのポアンカレ双対とする．あるホモロジー類 $\beta \in H_2(G/P, \mathbf{Z})$ に対し，$\sum_{i=1}^n \operatorname{codim}(A_i) = \dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)$ であると仮定する．このとき，ジェネリックに選んだ元 $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ に対し，等式

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_{0,n,\beta} \\ &= \#(ev_1^{-1}(g_1 A_1) \cap \cdots \cap ev_n^{-1}(g_n A_n)) \end{aligned}$$

を得る．

3. 量子コホモロジー

この節では X を，例えば一般化された旗多様体 G/P のような，スムーズで射影的な等質空間とし，小さな量子積と大きな量子積の双方の構成について概観することにしたい．

(A) (small QH) 有効な 2 次ホモロジー類 $\beta \in H_2(X, \mathbf{Z})_+$ に対し，形式的な変数 q^β を導入す

る．これらは積に関して $q^\beta q^\gamma = q^{\beta+\gamma}$ という規則に従うものとする．ここで小さな量子積 $\star$ を次のように定める．

$$\alpha_1 \star \alpha_2 = \sum_{\beta \in H_2(X,\mathbf{Z})_+} \sum_{i=0}^{m} q^\beta \langle \alpha_1, \alpha_2, T_i \rangle_{0,3,\beta} T^i.$$

ここで，$(T_i)_{i=0}^m$ は $H^*(X,\mathbf{Q})$ の線型基底であり，$(T^i)_{i=0}^m$ はその双対基底である．このように定めた積は

$$QH^*(X) := H^*(X,\mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}[[q^\beta | \, \beta \in H_2(X,\mathbf{Z})_+]]$$

の上に $\mathbf{Q}[[q^\beta | \, \beta \in H_2(X,\mathbf{Z})_+]]$-線型に延長できる．こうして得られた環 $QH^*(X)$ を X の小さな量子コホモロジー環と呼ぶ．例えば，$QH^*(\mathbf{P}^n)$ は $\mathbf{Q}[[q]][h]/(h^{n+1}-q)$ と同型である．ここで，$h \in H^2(\mathbf{P}^n,\mathbf{Z})$ は $\mathbf{P}^n$ の超平面が表す類である．

(**B**) (big QH) 小さな量子コホモロジー環が 3 点 GW 不変量の情報しか持たないというのは注意しておくべきことである．問題となっている多様体の数え上げ幾何的情報を得るためには，$n \geq 4$ の場合の n 点 GW 不変量も用いることがあり，大きな量子コホモロジー環が必要とされる．上と同様に $H^*(X,\mathbf{Q})$ の線型基底 $(T_i)_{i=0}^m$ をとり，$\gamma = \sum z_i T_i \in H^*(X,\mathbf{Q})$ とおく．GW ポテンシャル $GW^X(\gamma)$ を

$$GW^X(\gamma) = \sum_{\substack{n_0,\ldots,n_m \geq 0 \\ \beta \in H_2(X,\mathbf{Z})_+}} q^\beta \langle \underbrace{T_0,\ldots,T_0}_{n_0}, \ldots, \underbrace{T_m,\ldots,T_m}_{n_m} \rangle_{0,n,\beta} \frac{z^{\underline{n}}}{\underline{n}!}$$

と定義する．ここで，

$$\frac{z^{\underline{n}}}{\underline{n}!} = \frac{z_0^{n_0}}{n_0!} \cdots \frac{z_m^{n_m}}{n_m!}$$

とおいた．また，

$$GW^X_{ijk}(\gamma) := \frac{\partial^3 GW^X(\gamma)}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} = \sum_{\substack{n \geq 3 \\ \beta \in H_2(X,\mathbf{Z})_+}} \frac{1}{(n-3)!} \langle T_i, T_j, T_k, \underbrace{\gamma,\ldots,\gamma}_{n-3} \rangle_{0,n,\beta} q^\beta$$

と定めよう．

定義 3 基底 $\{T_i\}$ たちの間での大きな量子積を

$$T_i \star_\gamma T_j = \sum_{k=0}^{m} GW^X_{ijk}(\gamma) T^k$$

と定める．これを

$$QH^*_{\mathrm{big}}(X) := H^*(X,\mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}[[q^\beta]][[z_0,\ldots,z_m]]$$

の上に線型に延長することで，大きな量子コホモロジー環 $QH^*_{\mathrm{big}}(X)$ が得られる．

主張 大きな量子積 $\star_\gamma$ は結合則

$$(T_i \star_\gamma T_j) \star_\gamma T_k = T_i \star_\gamma (T_j \star_\gamma T_k)$$

を満たす．

例 射影平面 $\mathbf{P}^2$ に対しては，

$$GW^{\mathbf{P}^2}(z_0,z_1,z_2) = \frac{z_0^2 z_2 + z_0 z_1^2}{2} + \sum_{d \geq 1} N_d \frac{z_2^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{d z_1}$$

という形であり，大きな量子コホモロジー環 $QH^*_{\mathrm{big}}(\mathbf{P}^2)$ は，$\mathbf{Q}[[z]][Z]/(Z^3 - F_{111}Z^2 - 2F_{112}Z - F_{122})$ と同型になる[4]．ここで，$\mathbf{Q}[[z]] := \mathbf{Q}[[z_0, z_1, z_2]]$, $F_{ijk} := GW^{\mathbf{P}^2}_{ijk}(z_0,z_1,z_2)$ とおいた．

4. 数え上げ幾何学への応用．Kontsevich の公式

量子コホモロジーと数え上げ幾何との関係については Kontsevich と Manin の論文 14) で解説されている．

問題 複素射影平面 $\mathbf{P}^2$ 上で一般の位置にある $(3d-1)$ 点を通る d 次有理曲線の本数 N_d を決定せよ．

この問題は長い歴史を持っている[4]．$N_1 = N_2 = 1$ という事実は古代ギリシアに遡るものと言える．次の $N_3 = 12$ は 1848 年に J. Steiner よって計算され，$N_4 = 620$ は H. Zeuthen により 1873 年に，

また H. Schubert により 1879 年に計算されている．Schubert が発見した $N_5 = 87304$ は 1985 年になってやっと I. Vainsencher により正当化された．すべての N_d を決定することは 100 年以上の間未解決であったが，1994 年に Kontsevich は次の漸化式を証明してすべての N_d を決定した．

定理 2（**Kontsevich の公式**）（文献 14) の Claim 5.2.1，または文献 4) 参照.）

$$N_d = \sum_{\substack{d_1+d_2=d\\ d_1,d_2\geq 1}} N_{d_1}N_{d_2}\left[d_1^2 d_2^2\binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2\binom{3d-4}{3d_1-1}\right].$$

初期条件 $N_1 = 1$（即ち，異なる 2 点を通る直線は唯一本）の下で，上の漸化式はすべての $d > 1$ に対して N_d を決定する．

話を先に進める前に，なぜ一般の位置にある $(3d-1)$ 個の点を選んできているのかについて説明しておこう．まず幾つかの定義を思い出しておく．既約な d 次平面曲線は d 次斉次既約多項式の零点として

$$C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2 \mid f(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

と記述される．そのような曲線 C たちの集合は $D = (d+1)(d+2)/2 - 1$ 次元の射影空間 $\mathbf{P}^D$ へ埋め込まれる．非特異な曲線たちの集合は，$\mathbf{P}^D$ において稠密な開集合をなす．曲線 C の非特異点たちは C の開集合をなし，特異点集合

$$\mathrm{Sing}(C) = \left\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2 \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, x_1, x_2) = 0,\ i = 0, 1, 2\right\}.$$

の補集合となっている．ある曲線上の特異点において，ちょうど 2 本の異なる接線が引けるとき，その特異点は通常二重点，あるいは結節点と呼ばれる．今，曲線 C はちょうど δ 個の結節点を持つとしよう．Riemann-Hurwitz 公式より C の種数 $g = g(C)$ は $2g = (d-1)(d-2) - 2\delta$ を満たす．各結節点の存在は曲線 C の定義方程式の係数の間に線型方程式の形の条件を課すことになるので，種数 g で δ 個の通常二重点を持つような連結曲線は $D - \delta = 3d - 1 + g$ 個のパラメータに依存することになる．従って，そのような曲線のうち，$3d - 1 + g$ 個の一般の位置にある点を通るものの個数は有限個であると期待できる．

古典的なコホモロジー環 $H^*(\mathbf{P}^2, \mathbf{Z})$ は，その線型基底として $T_0 = 1, T_1 = [\ell], T_2 = [pt]$ を持つ．ここで，1 は基本類，$[\ell]$ は $\mathbf{P}^2$ 上の直線の双対類であり，$[pt]$ は一点の双対類である．これらの間の非自明な関係式は，$T_1^2 = T_2$ と $T_1T_2 = 0$ である．これから文献 7) に従い，$\mathbf{P}^2$ の（大きな）量子コホモロジー環の構造が N_d の値の決定にどのように役立つのかを説明したい．まず，GW ポテンシャル $GW^{\mathbf{P}^2} = f_{\mathrm{cl}} + f$ を考えよう．ここで，

$$f_{\mathrm{cl}}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 z_2 + z_0 z_1^2)/2,$$

$$f = \sum_{d\geq 1} N_d \frac{z_2^{3d-1}}{(3d-1)!}\exp(dz_1)$$

とおいた．この f の項は，$\mathbf{P}^2$ のコホモロジー環における古典的な積への「量子補正」に対応している．$\partial f/\partial z_0 = 0$ にも注意しておこう．

射影平面 $\mathbf{P}^2$ の大きなコホモロジー環は次のように記述される．$QH^*_{\mathrm{big}}(\mathbf{P}^2)$ は形式的冪級数環 $\mathbf{Q}[[z_0, z_1, z_2]]$ 上で互いに可換な元 T_0, T_1, T_2 で生成され，第 3 節で見たように積構造は

$$T_i \star T_j = \sum_{k=0}^{m} F_{ijk} T^k$$

で定められている．従って，生成元 T_0, T_1, T_2 たちの間の量子積は次の規則で与えられる．まず，基本類 T_0 は単位元の役割を果たす．つまりそれは $F_{0ij} = \partial f_{\mathrm{cl}}/\partial z_0 = \langle T_i, T_j\rangle$ ということである．その他のケースについては，

$$\begin{aligned} T_1 \star T_1 &= f_{112}T_0 + f_{111}T_1 + T_2, \\ T_1 \star T_2 &= f_{122}T_0 + f_{121}T_1, \\ T_2 \star T_2 &= f_{222}T_0 + f_{221}T_1 \end{aligned}$$

となっている．量子積 $\star$ の基礎的な性質は，それが結合則を満たしているということである．特に，$(T_1 \star T_1) \star T_2 = T_1 \star (T_1 \star T_2)$ なので，

$$
\begin{aligned}
(T_1 \star T_1) \star T_2 &= f_{111}(f_{122}T_0 + f_{121}T_1) \\
&\quad + f_{222}T_0 + f_{221}T_1 + f_{112}T_2, \\
T_1 \star (T_1 \star T_2) &= f_{121}(f_{112}T_0 + f_{111}T_1 + T_2) \\
&\quad + f_{122}T_1.
\end{aligned}
$$

量子積 $\star$ の結合則が関係式 $f_{222} = f_{112}^2 - f_{111}f_{122}$ と同値になることは容易に分かり，この関係式が定理 2 で述べた N_d に関する漸化式と同値になることも確認できる．実際に，

$$
\begin{aligned}
f_{111} &= \sum_{d \geq 1} d^3 N_d \frac{z_2^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dz_1}, \\
f_{112} &= \sum_{d \geq 1} d^2 N_d \frac{z_2^{3d-2}}{(3d-2)!} e^{dz_1}, \\
f_{122} &= \sum_{d \geq 1} d N_d \frac{z_2^{3d-3}}{(3d-3)!} e^{dz_1}, \\
f_{222} &= \sum_{d \geq 2} N_d \frac{z_2^{3d-4}}{(3d-4)!} e^{dz_1}
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
&f_{112}^2 - f_{111}\ f_{122} \\
&= \sum_{d \geq 2} \Bigg(\sum_{d_1 + d_2 = d} \frac{d_1^2 N_{d_1} d_2^2\ N_{d_2}}{(3d_1 - 1)!(3d_2 - 2)!} \\
&\quad - \sum_{d_1 + d_2 = d} \frac{d_1^3 N_{d_1} d_2 N_{d_2}}{(3d_1 - 1)!(3d_2 - 3)!} \Bigg) z_2^{3d-4}\ e^{dz_1}.
\end{aligned}
$$

最後に $z_2^{3d-4} e^{dz_1}/(3d-4)!$ の係数に注目すれば定理 2 の N_d に関する漸化式を得る．

参考文献

1) B. Bertrand, E. Brugalle and G. Mikhalkin, Genus 0 characteristic numbers of the tropical projective plane, preprint, arXiv:1105.2004, 55pp.
2) K. Behrend, Gromov-Witten invariants in algebraic geometry, *Invent. Math.* **127** (1997), 601–617.
3) L. Caporaso and J. Harris, Counting plane curves of any genus, *Invent. Math.* **131** (1998), no.2, 345–392.
4) F. Di Francesco and C. Itzykson, *Quantum intersection rings. The moduli space of curves*, Progr. Math., **129**, 81–148, Birkhäuser Boston, MA, 1995.
5) L. Ernström and G. Kennedy, Recursive formulas for the characteristic numbers of rational plane curves, *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no.1, 141–181.
6) K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant, *Topology* **38** (1999), no.5, 933–1048.
7) W. Fulton and R. Pandharipande, Notes on stable maps and quantum cohomology, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **62**, Part 2, 45–96, AMS, Providence, RI, 1997.
8) A. Givental, *A tutorial on quantum cohomology. Symplectic geometry and topology*, 231–264, IAS/Park City Math. Ser., **7**, AMS, Providence, RI, 1999.
9) M. Gromov, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), 307–347.
10) M. Gross, Tropical Geometry and Mirror Symmetry, *CBNS*, **114** (2011).
11) J. Kock, Tangency quantum cohomology, *Compos. Math.* **140** (2004), no.1, 165–178.
12) J. Kock and I. Vainsencher, *An invitation to quantum cohomology. Kontsevich's formula for rational plane curves*, Progr. Math., **249**. Birkhäuser Boston, MA, 2007.
13) M. Kontsevich, Enumeration of rational curves via torus actions, Progr. Math., **129**, 335–368, Birkhäuser Boston, MA, 1995.
14) M. Kontsevich and Yu. Manin, Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry, *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), no.3, 525–562.
15) Yu. Manin. *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, Colloquium Publications, **47**. AMS, Providence, RI, 1999.
16) D. Maulik and A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, preprint, arXiv:1211.1287, 276 pp.
17) D. McDuff and D. Salamon, *J*-holomorphic curves in symplectic Topology, Colloquium Publications, **52**, AMS, 2004.
18) Y. Ruan and G. Tian, A mathematical theory of quantum cohomology, *J. Differential Geom*, **42** (1995), no.2, 259–367; Y. Ruan and G. Tian, A mathematical theory of quantum cohomology, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), no.2, 269–278.
19) C. Vafa, *Topology mirrors and quantum rings*, in *Essays on mirror manifolds, ed. S.-T. Yau*, Hong-Kong International Press, 1992.
20) E. Witten, Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space, *Surveys in Duff. Geometry* **1** (1991), 243–310.
21) H. Zeuthen and M. Pieri, in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, III.2, 260–331, Gauthier-Villars, Paris, 1915.

（アナトーリ・N・キリロフ，京都大学数理解析研究所）
（まえの・としあき，名城大学理工学部）

Hecke 環と対称多項式

Macdonald 多項式入門



野海 正俊

表題に掲げた Macdonald 多項式は，1980 年代の後半に I.G. Macdonald によって導入された多変数 q 直交多項式のクラスである．広義には，ルート系（+付加的なデータ）に付随して定義される Macdonald の多変数 q 直交多項式系の総称，狭義には，ルート系の意味で A 型の場合を指す．本稿では議論を簡明にするために，A 型の Macdonald 多項式に限定して，多変数 q 直交多項式と Hecke 環との係わりを概観する．

1. q 差分作用素の可換族

微分作用素や差分作用素の可換な族に対して，その同時固有函数を調べる問題は，特殊函数研究の中心的なテーマの一つであり，数学や物理の様々な分野が交差する興味深い地点に位置している．この節では Macdonald 多項式に関連する q 差分作用素の可換族のことを見ておく．

0 でない定数 $q \in \mathbb{C}$ を固定する．変数 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の函数に対して，x_i だけを qx_i に置き換える q 倍作用素を T_{q,x_i} で表す：$T_{q,x_i} f(x) = f(x_1, \ldots, qx_i, \ldots, x_n)$．一般に，

$$A = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n \in \mathbb{Z}} a_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) T_{q,x_1}^{\mu_1} \cdots T_{q,x_n}^{\mu_n} \quad (1)$$

の形の有限和で表される作用素を **q 差分作用素**と呼ぶ．以下では，係数の $a_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)$ がすべて x の有理函数である場合を考えることとし，この形の作用素全体を $\mathcal{D}_{q,x} = \mathbb{C}(x)[T_{q,x}^{\pm 1}]$ で表す．x を座標系とするアフィン空間に，群 W が $\mathcal{D}_{q,x}$ を保つように作用するときには，q 差分作用素で **W 不変**なもの（W の作用と可換なもの）全体のなす環を $\mathcal{D}_{q,x}^W$ で表す．

q 差分作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}$ や W 不変 q 差分作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}^W$ に対して，その可換部分環で極大なものをすべて決定せよ—というような問も考えられるが，現実的に解答可能な問かどうかはよく分からない．一方で，W が有限 Weyl 群の場合には，$\mathcal{D}_{q,x}^W$ の中に，非自明で，十分大きな可換部分環を構成できることが知られている．Macdonald 多項式は，W 不変な（Laurent）多項式であって，そのような可換部分環の同時固有函数として特徴付けられる．以下では，W が n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$（A_{n-1} 型の Weyl 群）の場合を考える．

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ の函数には，n 次の対称群 $W = \mathfrak{S}_n$ が変数の添字の置換として働く：$w \in W$ に対して $wf(x) = f(x_{w(1)}, \ldots, x_{w(n)})$．この場合に W 不変 q 差分作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}^W$ の可換部分環を考えたいわけだが，ひとまず $\mathcal{D}_{q,x}^W$ の「自明な」可換部分環に注目しよう．n 個の q 倍作用素は可換だから $T_{q,x} = (T_{q,x_1}, \ldots, T_{q,x_n})$ の Laurent 多項式の全体

$$\mathbb{C}[T_{q,x}^{\pm 1}] = \mathbb{C}[T_{q,x_1}^{\pm 1}, \ldots, T_{q,x_n}^{\pm 1}] \subset \mathcal{D}_{q,x} \quad (2)$$

は q 差分作用素環の可換部分環である．次に $T_{q,x}$ の r 次の基本対称式

$$e_r(T_{q,x}) = \sum_{|I|=r} T^I_{q,x}; \quad T^I_{q,x} = \prod_{i\in I} T_{q,x_i} \quad (3)$$

を考えよう $(r=0,1,\ldots,n)$．ここで I は添字集合 $\{1,\ldots,n\}$ の部分集合で r 個の元からなるもの全体にわたる．これらの $e_r(T_{q,x})$ $(r=1,\ldots,n)$ は，W 不変であり（変数の番号付けに依存しない），かつ互いに可換だから $\mathcal{D}^W_{q,x}$ の可換部分環

$$\mathcal{R}_1 = \mathbb{C}[e_1(T_{q,x}),\ldots,e_n(T_{q,x})] \subset \mathcal{D}^W_{q,x} \quad (4)$$

を生成する．最高次の $e_n(T_{q,x}) = T_{q,x_1}\cdots T_{q,x_n}$ は x についての次数を計る「Euler 作用素」であるが，これは可逆なので，$\mathcal{R}_1$ に $e_n(T_{q,x})^{-1}$ を添加しても可換である．

今，変数 x の差積 $\Delta(x) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$ によって $e_r(T_{q,x})$ を共役変換した q 差分作用素

$$E_r = \Delta(x)^{-1} e_r(T_{q,x}) \Delta(x) \quad (5)$$

を考えよう $(r=0,1,\ldots,n)$．差積 $\Delta(x)$ は置換の作用で符号を生じるだけなので，$E_1,\ldots,E_n$ は W 不変．また互いに可換なものを $\Delta(x)$ で共役変換しただけなので，互いに可換である．これで $\mathcal{D}^W_{q,x}$ の可換部分環

$$\mathcal{R}_q = \mathbb{C}[E_1,\ldots,E_n] \subset \mathcal{D}^W_{q,x} \quad (6)$$

が得られる．これも「ほとんど自明」な可換部分環であるが，念のため E_r を書き下してみる．

$$\frac{T^I_{q,x}(\Delta(x))}{\Delta(x)} = q^{\binom{|I|}{2}} \prod_{i\in I;\, j\notin I} \frac{qx_i - x_j}{x_i - x_j} \quad (7)$$

だから

$$E_r = q^{\binom{r}{2}} \sum_{|I|=r} \prod_{i\in I;\, j\notin I} \frac{qx_i - x_j}{x_i - x_j} T^I_{q,x} \quad (8)$$

となる（$\binom{r}{2} = r(r-1)/2$ は 2 項係数）．

ここでパラメータ t を導入して，$E_1,\ldots,E_n$ を少しだけ（？）変形する．t をパラメータとする，変数 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ の q 差分作用素の系列 D_r $(r=0,1,\ldots,n)$ を

$$D_r = t^{\binom{r}{2}} \sum_{|I|=r} \prod_{i\in I;\, j\notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T^{\epsilon_I}_{q,x} \quad (9)$$

で定義する（$D_0 = 1$）．最初の非自明なものは

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\ne i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}. \quad (10)$$

$D_n = t^{\binom{n}{2}} T_{q,x_1}\cdots T_{q,x_n}$ は Euler 作用素の定数倍である．上記の $E_r = \Delta(x)^{-1} e_r(T_{q,x})\Delta(x)$ と比較すると，D_r は係数側に現れる q を t に変更しただけのもので，D_r が W 不変であることはすぐに分かる．驚くべきことは，これらが互いに可換となること，即ち q 差分作用素としての関係式 $D_r D_s = D_s D_r$ $(r,s\in\{1,\ldots,n\})$ が成立することである．これによって可換部分環

$$\mathcal{R}_t = \mathbb{C}[D_1,\ldots,D_n] \subset \mathcal{D}^W_{q,x} \quad (11)$$

が得られる．狭義には，$D_1,\ldots,D_n$ を，広義には $\mathcal{R}_t[D_n^{-1}]$ に属する作用素を，**Ruijsenaars–Macdonald の q 差分作用素**という．

Ruijsenaars はオランダ人．オランダ語の発音を仮名で表記するのは難しいが，聞いた感じではラウセナースに近い．当の本人も外国人に名前をオランダ式に発音してもらうことは諦めているらしく，自己紹介するのに「アイ・アム・リュイセナース」と言っているのを聞いたことがある．作用素 $D_1,\ldots,D_n$ は，（正確にはその楕円版が）Ruijsenaars の 1987 年の論文[5]にある．Macdonald の本[3]にも出ていて，この本の草稿はかなり早い時期から流布していたので，同じ頃に Macdonald もこの可換族を知っていたのだろうと思うが，正確なことは知らない．楕円版の D_r は単に **Ruijsenaars 差分作用素**と呼ぶ．

なお，Ruijsenaars–Macdonald の q 差分作用素 D_r を差積を使って表せば

$$D_r = \sum_{|I|=r} \frac{T^I_{t,x}\Delta(x)}{\Delta(x)} T^I_{q,x} \quad (12)$$

となる．D_r $(r=0,1,\ldots,n)$ をまとめて取り扱うときには，母函数にして $D(u) = \sum_{r=0}^{n}(-u)^r D_r$ を考えるのが便利である．この表示と，Vandermonde の行列式 $\Delta(x) = \det(x_i^{n-j})_{i,j=1}^{n}$ を用いると $D(u)$ の行列式表示が得られる．

q 差分作用素の族 D_r $(r=1,\ldots,n)$ の性質として重要なのは，これらが (1) 互いに可換であり，しかも (2) 対称多項式環 $\mathbb{C}[x]^W$ を保つことである．可換性 $D_rD_s=D_sD_r$ $(r,s\in\{1,\ldots,n\})$ を示すのはあまり簡単ではないが，Ruijsenaars[5] は，彼の差分作用素族の可換性を，楕円函数のある恒等式に帰着して証明している．q 差分作用素の場合で述べると，D_r $(r=1,\ldots,n)$ の可換性は，次の恒等式に帰着する：$r=0,1,\ldots,n$ のとき

$$\sum_{|I|=r}\prod_{i\in I;j\notin I}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\frac{1-qx_i/tx_j}{1-qx_i/x_j}$$
$$=\sum_{|I|=r}\prod_{i\in I;j\notin I}\frac{1-tx_j/x_i}{1-x_j/x_i}\frac{1-qx_j/tx_i}{1-qx_j/x_i}. \quad (13)$$

このような q,t の組合せは，様々な局面で議論の要として現れ，なかなか奥深いところである．興味のある人は，可換性の証明を自ら検討してみてほしい．

詳しい説明は省略するが，$D_1,\ldots,D_n$ は対称多項式環を保ち，しかもある種の三角性（単項式型対称式の優順序に関する）をもつ．Macdonald の本[3] では，このことが母函数 $D(u)$ の行列式表示を用いて示されている．これから，パラメータ q,t が一般であれば，q 差分作用素の可換族 $D_1,\ldots,D_n$ が $\mathbb{C}[x]^W$ 上で同時対角化されることが従う．即ち，成分数が n 以下の任意の分割 λ に対して，単項式型対称式 $m_\lambda(x)$ を主要項とする同次対称多項式 $P_\lambda(x)$ が定まり，$r=1,\ldots,n$ に対して

$$\begin{aligned}&D_rP_\lambda(x)=P_\lambda(x)e_r(t^\delta q^\lambda),\\&t^\delta q^\lambda=(t^{n-1}q^{\lambda_1},t^{n-2}q^{\lambda_2},\ldots,q^{\lambda_n})\end{aligned} \quad (14)$$

を満たす．ここで固有値は，$t^\delta q^\lambda$ の r 次の基本対称式である．さらに，これらの $P_\lambda(x)$ の全体は，対称多項式環 $\mathbb{C}[x]^W$ の $\mathbb{C}$ 基底をなす．この $P_\lambda(x)=P_\lambda(x|q,t)$ が（A_{n-1} 型の）**Macdonald 多項式**である．

なお，λ が1列の分割 $(1^r)=(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ のときは，$P_{(1^r)}(x)=e_r(x)$ で Macdonald 多項式は基本対称式に一致する．特に $P_0(x)=1$ なので，$D_1\cdot 1=1+t+\cdots+t^{n-1}$．これは

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}=\frac{1-t^n}{1-t} \quad (15)$$

を意味する．Macdonald 多項式の理論の背後では，至る所でこの種の有理函数の恒等式が活躍している．

2. Macdonald 多項式の基本性質

Macdonald 多項式（特に A 型の場合）については，実に様々な性質が知られている（(q,t) Kostka 係数の組合せ論については，未だに未知の領域があるものの，それ以外のことは何でも分かっているのではないかという印象すらある）．この節で，A 型の Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)=P_\lambda(x|q,t)$ の基本的な性質のいくつかを，駆け足でまとめておく．

(a) 特殊化：$P_\lambda(x|q,t)$ は，$t=1$ のときは，単項式型対称式 $m_\lambda(x)$ を，$t=q$ のときは，Schur 多項式 $s_\lambda(x)$ を表す．$q\to 0$ の極限では，Hall–Littlewood 多項式，また $t=q^\beta,q\to 1$ の極限では Jack 多項式となる．

(b) q 差分方程式：$P_\lambda(x)$ は，Ruijsenaars–Macdonald q 差分作用素の可換族 $D_1,\ldots,D_n$ の同時固有函数である（前節で述べたこと）．

(c) 直交性：記述を簡単にするため $t=q^k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ で，q は一般と仮定し，Laurent 多項式

$$w_k(x)=\prod_{1\le i,j\le n;\,i\neq j}\ \prod_{l=0}^{k-1}(1-q^lx_i/x_j) \quad (16)$$

を考える．この $w_k(x)$ を重み函数として，対称多項式環 $\mathbb{C}[x]^W$ に内積（2 次形式）

$$\langle f,g\rangle_k=\frac{1}{n!}\mathrm{CT}\left[f(x^{-1})g(x)w_k(x)\right] \quad (17)$$

を導入する．$\mathrm{CT}[h(x)]$ は，Laurent 多項式 $h(x)$ の定数項．Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ は，この内積に関する直交多項式系をなし，分割 λ,μ が異なれば，$\langle P_\lambda(x),P_\mu(x)\rangle_k=0$ である．Ruijsenaars–Macdonald の q 差分作用素 $D(u)$ は，この内積に関して自己共役であり，Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ が λ 毎に異なる固有値をもつことからこの直交性

が従う．内積値 $\langle P_\lambda(x), P_\lambda(x)\rangle_k$ についても明示公式がある．

(d) 特殊値と双対性： $P_\lambda(x)$ の $x = t^\delta = (t^{n-1}, t^{n-2}, \ldots, 1)$ での値については，因子化した明示公式がある．また，成分数 n 以下の任意の分割 λ, μ に対して，印象的な**双対性公式**

$$\frac{P_\lambda(t^\delta q^\mu)}{P_\lambda(t^\delta)} = \frac{P_\mu(t^\delta q^\lambda)}{P_\mu(t^\delta)} \tag{18}$$

が成立する．$\widetilde{P}_\lambda(x) = P_\lambda(x)/P_\lambda(t^\delta)$ とおくと，$\widetilde{P}_\lambda(t^\delta q^\mu) = \widetilde{P}_\mu(t^\delta q^\lambda)$ となり，この規格化の下では，空間の点 $x = t^\delta q^\mu$ と，固有値を指定する点 $s = t^\delta q^\lambda$ の役割が対等になる．

(e) Pieri 公式： 基本対称式 $e_r(x)$ を一般の Macdonald 多項式 $P_\mu(x)$ に乗じたものを，また Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ の 1 次結合に展開して

$$e_r(x)\, P_\mu(x) = \sum_{\lambda \supseteq \mu} \psi'_{\lambda/\mu} P_\lambda(x) \tag{19}$$

と書くと，$|\lambda| = |\mu| + r$ で，Young 図形の差集合 $\lambda \backslash \mu$ が垂直断片（vertical strip）となるような λ に関する和となる（$\psi'_{\lambda/\mu}$ に対する明示公式もある）．このような展開式は，(d) で述べた双対性を経由して，固有函数方程式 (14) とちょうど，双対の関係にある．

ここで述べたことは Macdonald 多項式の基本事項の一部分である．Cauchy 型，双対 Cauchy 型の核函数（母函数）や，制限公式，タブロー型明示公式などにも言及しておきたいところだが，先に進もう．関連する話題として，量子群や変形 Virasoro 代数の表現論，種々の幾何学や組合せ論との係わりもあるが，今はこれ以上立ち入らない．

3. アフィン Hecke 環の観点

Cherednik[1] は，Knizhnik–Zamolodchikov 方程式の量子化の観点から，アフィン Hecke 環と 2 重アフィン Hecke 環を基礎として Macdonald 多項式の理論を再構築し，それによって，ルート系に付随する Macdonald 多項式の多様な性質を，系統的に理解する方法を与えた．以下では，概ね Macdonald[4] の定式化に沿って，アフィン Hecke 環と Macdonald 多項式との係わりを説明する．

Hecke 環の記号との衝突を避けるために，今後 q 倍作用素 T_{q,x_i} を τ_i と記し，q 倍作用素の組を $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ で表す：$i = 1, \ldots, n$ に対して $\tau_i f(x) = f(x_1, \ldots, qx_i, \ldots, x_n)$（$x_i$ だけ q 倍）．$x = (x_1, \ldots, x_n)$ の有理函数を係数とする q 差分作用素環を $\mathcal{D}_{q,x} = \mathbb{C}(x)[\tau^{\pm 1}]$ で表し，さらに，q 差分作用素と変数の置換（$W = \mathfrak{S}_n$ の作用）で生成される環 $\mathcal{D}_{q,x}[W] = \mathbb{C}(x)[\tau^{\pm 1}][W]$ を考える．係数を x の Laurent 多項式に限定すれば，部分環

$$\mathbb{C}[x^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}][W] \subset \mathcal{D}_{q,x}[W] \tag{20}$$

が得られるが，これは乗法的に表現した Heisenberg–Weyl 群の群環と同型．この環の 2 つの部分環

$$\mathbb{C}[x^{\pm 1}][W], \quad \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}][W] \tag{21}$$

はいずれも，（拡大）アフィン Weyl 群の群環と同型である．

今 t を変形パラメータとして，$\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の中で，**Lusztig 作用素** $T_1, \ldots, T_{n-1}$ を次のように定義する：$i = 1, \ldots, n-1$ に対して

$$T_i = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - t x_i/x_{i+1}}{1 - x_i/x_{i+1}} (s_i - 1). \tag{22}$$

ここで $s_i = (i, i+1)$ は変数と x_i と x_{i+1} を入れ換える隣接互換である．$t = 1$ とおくと，T_i は s_i に退化するので，T_i は s_i の t 変形と看做せる．q 倍を伴う変数の回転 $\omega = s_{n-1} s_{n-2} \cdots s_1 \tau_1$，即ち

$$\omega f(x) = f(qx_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{23}$$

を使って，$s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$ と定義すると，q 倍を伴って x_1, x_n を交換する作用素

$$s_0 f(x) = f(qx_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, q^{-1}x_1) \tag{24}$$

が得られる．Lusztig 作用素についても $T_0 = \omega T_1 \omega^{-1}$ と定義する：

$$T_0 = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - tqx_n/x_1}{1 - qx_n/x_1} (s_0 - 1). \tag{25}$$

隣接互換 $s_1, \ldots, s_{n-1}$ が, n 次対称群 $W = \mathfrak{S}_n$ を生成することに注意して, これに ω を添加した群

$$\widetilde{W} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, \omega \rangle \tag{26}$$

を考える（生成するだけなら s_0 は不要）. q 倍作用素 τ_i $(i = 1, \ldots, n)$ はこの $\widetilde{W}$ の中で

$$\tau_i = s_i \cdots s_{n-1} \omega s_1 \cdots s_{i-1} \tag{27}$$

と復元され, $\widetilde{W}$ は $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ の単項式全体のなすアーベル群 τ^P $(P = \mathbb{Z})$ と W の半直積に分解する：$\widetilde{W} = \tau^P \rtimes W$. この群 $\widetilde{W}$ が A_{n-1} 型の**拡大アフィン Weyl 群**であり, その群環が $\mathbb{C}[\widetilde{W}] = \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}][W]$ である.

同様に, Lustzig 作用素側で $T_1, \ldots, T_{n-1}$ と $\omega^{\pm 1}$ で生成される $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の部分環

$$H(\widetilde{W}) = \mathbb{C}\langle T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1} \rangle \tag{28}$$

を考えると, これが A_{n-1} 型**拡大アフィン Hecke 環**の実現を与える. $H(\widetilde{W})$ は, 拡大アフィン Weyl 群の群環 $\mathbb{C}[\widetilde{W}]$ の t 変形と看做せる.

拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, \omega \rangle$ の生成系の基本関係は

$$\begin{aligned} &s_j^2 = 1 && (j = 0, 1, \ldots, n-1), \\ &s_i s_j = s_j s_i && (j \not\equiv i, i \pm 1), \\ &s_i s_j s_i = s_j s_i s_j && (j \equiv i \pm 1; n \geq 3), \\ &\omega\, s_j = s_{j-1} \omega && (j = 0, 1, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{29}$$

で与えられる（s_j の添字は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元と見る）. これに呼応して $H(\widetilde{W}) = \langle T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1} \rangle$ の生成系は, 次の 3 種類の関係式を満たす.

(a) 2 次関係式：$j = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して

$$(T_j - t^{\frac{1}{2}})(T_j + t^{-\frac{1}{2}}) = 0. \tag{30}$$

(b) 組み紐関係式（braid relation）：

$$\begin{aligned} &T_i T_j = T_j T_i && (j \not\equiv i, i \pm 1), \\ &T_i T_j T_i = T_j T_i T_j && (j \equiv i \pm 1; n \geq 3). \end{aligned} \tag{31}$$

(c) 添字の回転との整合性：

$$\omega\, T_j = T_{j-1} \omega \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{32}$$

パラメータ q, t が一般であれば, $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の部分

環 $H(\widetilde{W})$ は，ここに掲げた 3 種類の関係式を基本関係式として抽象的に定義した $\mathbb{C}$ 代数と同型となる（これ以後 q, t は一般と仮定する）．

拡大アフィン Weyl 群の群環

$$\mathbb{C}[\widetilde{W}] = \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}][W] \subset \mathcal{D}_{q,x}[W] \tag{33}$$

は，Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$ を可換部分環として含むわけだが，拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ の中に同様の部分環を構成するために，$i = 1, \ldots, n$ に対して

$$Y_i = T_i \cdots T_{n-1}\, \omega\, T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1} \tag{34}$$

と定義する（(27) と比較すると，ω の右では T_j でなく T_j^{-1} を使っていることに注意）．このとき，組み紐関係式から $Y_1, \ldots, Y_n$ が互いに可換であることが導かれ，

$$\mathbb{C}[Y^{\pm 1}] = \mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \ldots, Y_n^{\pm}] \subset H(\widetilde{W}) \tag{35}$$

は，Laurent 多項式環と同型な可換部分環となる．$t = 1$ のときには，Y_i は，τ_i に戻る．$Y_i \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$ は Weyl 群作用を含めた環の中で q 倍作用素 τ_i を t 変形したものであり，**Dunkl–Cherednik 作用素**と呼ばれる．さらに，$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ の W 不変 Laurent 多項式の全体を $\mathbb{C}[Y^{\pm 1}]^W$ で表せば，この可換部分環がちょうど，拡大アフィン Hecke 環の中心に一致することが知られている（Bernstein の定理）：$\mathcal{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{C}[Y^{\pm 1}]^W$（Dunkl–Cherednik 作用素 Y_i の定義にはいくつかの流儀があるので，文献を参照するときには，注意してほしい）．

$\mathcal{D}_{q,x}[W]$ に属する作用素は，

$$A = \sum_{w \in W} A_w\, w;\ A_w \in \mathcal{D}_{q,x} \quad (w \in W) \tag{36}$$

と表示されるが，$\varphi(x)$ が W 不変，即ち対称函数であれば，$A\varphi(x) = \sum_{w \in W} A_w \varphi(x)$．つまり A は，対称函数の上には，q 差分作用素

$$L(A) = \sum_{w \in W} A_w \in \mathcal{D}_{q,x} \tag{37}$$

として作用する．A が Dunkl–Cherednik 作用素の対称 Laurent 多項式 $f(Y) \in \mathbb{C}[Y^{\pm 1}]^W$ の場合には，対応する q 差分作用素 $L_f = L(f(Y))$ は W 不変となるので，

$$L:\ \mathcal{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{C}[Y^{\pm 1}]^W \to \mathcal{D}_{q,x}^W \tag{38}$$

なる $\mathbb{C}$ 代数の準同型が得られる．そこで，$r = 0, 1, \ldots, n$ に対して，Dunkl–Cherednik 作用素の基本対称式 $e_r(Y)$ を考え，Y_i の構成法を追跡すると，W 不変な q 差分作用素 $L_{e_r} = L(e_r(Y))$ は，

$$t^{-r(n-r)/2} \sum_{|I|=r} \prod_{i \in I;\, j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i \in I} \tau_i \tag{39}$$

と計算される．即ち $L_{e_r} = t^{-(n-1)r/2} D_r$ で，r 次の Ruijsenaars–Macdonald q 差分作用素の定数倍に一致する．$e_1(Y), \ldots, e_n(Y), e_n(Y)^{-1}$ が対称 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[Y^{\pm 1}]^W$ の生成系を与えることから，この対応で $\mathbb{C}$ 代数の同型

$$\begin{aligned} L :& \mathcal{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{C}[Y^{\pm 1}]^W \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[D_1, \ldots, D_n, D_n^{-1}] \subset \mathcal{D}_{q,x}^W \end{aligned} \tag{40}$$

が誘導される．即ち，Ruijsenaars–Macdonald q 差分作用素のつくる可換部分環 $\mathcal{R}_t[D_n^{-1}]$ は，拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ の中心を，Dunkl–Cherednik 作用素を経由して，q 差分作用素環に投影したものに一致するというわけである．

上記の実現を通じて拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ は，x の有理函数体に作用し，その作用は Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x^{\pm}]$ を保つ．また，Dunkl–Cherednik 作用素 $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ は，x の単項式のある半順序について三角性をもつので，$\mathbb{C}[x^{\pm}]$ 上で同時対角化される．Dunkl–Cherednik 作用素を同時対角化する基底は，多重指数 $\mu \in P$ でパラメータ付けられ，その基底を構成する Laurent 多項式 $E_\mu(x)$ ($\mu \in P$) は**非対称 Macdonald 多項式**と呼ばれる．それを，Hecke 環 $H(W) = \mathbb{C}\langle T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle$ の対称化作用素で対称化すれば，対称 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x^{\pm}]^W$ の基底として Macdonald 多項式が得られる．

Heisenberg–Weyl 群の群環

$$\mathbb{C}[x^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}][W] \subset \mathcal{D}_{q,x}[W] \tag{41}$$

は，x 側と τ 側の 2 個のアフィン Weyl 群の群環を $\mathbb{C}[W]$ で張り合わせたものである．そこで $\mathbb{C}[W] = \mathbb{C}\langle s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle$ を Hecke 環 $H(W) = \mathbb{C}\langle T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle$ に置き換え，q 倍作用素 $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ を Dunkl–Cherednik 作用素 $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ に置き換えると，$\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の中で Heisenberg–Weyl 群の群環を t 変形した部分環

$$\mathbb{C}[x^{\pm 1}; Y^{\pm 1}][T_1, \ldots, T_{n-1}] \tag{42}$$

が得られる．これを **2 重アフィン Hecke 環**と呼ぶ（しばしば DAHA と称される）．

この 2 重アフィン Hecke 環は，$x_i^{\pm 1}$, $Y_i^{\pm 1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ と T_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ から生成される $\mathbb{C}$ 代数であるが，驚くべきことに，この代数の中では，x_i と Y_i の役割が完全に対称的になってしまう．前節の (d) で述べた Macdonald 多項式の双対性公式は，この 2 重アフィン Hecke 環に x_i と Y_i の役割を入れ換える**対合**（Cherednik involution）が存在することからの帰結として，証明することができる．この枠組みで，特殊値や内積値など，Macdonald 多項式の様々な性質が（ルート系によらないやり方で）導かれるのだが，もう紙面が尽きてしまった．興味のある人は Macdonald の本[4]等を参照してほしい．

参考文献

1) I. Cherednik: Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures, *Ann. Math.* **141** (1995), 191–216.
2) 堀田良之・渡辺敬一・庄司俊明・三町勝久：『代数学百科 I—群論の進化』，朝倉書店，2004（特に第 4 章）．
3) I.G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition, Oxford University Press, 1995.
4) I.G. Macdonald: *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Cambridge University Press, 2003.
5) S.N.M. Ruijsenaars: Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities, *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 191–213.
6) 白石潤一：『量子可積分系入門』SGC ライブラリ 28, サイエンス社，2003.

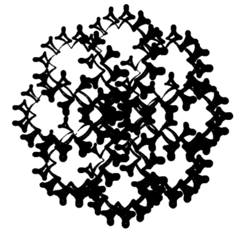
（のうみ・まさとし，神戸大学大学院理学研究科）

第四回作用素環賞について

千葉大学大学院理学研究科准教授の松井宏樹氏が第四回作用素環賞を受賞されました．同氏の C^* 環と力学系の分類に関する業績には著しいものがあり作用素環論の発展に寄与するところ大であると高く評価されたものです．平成 24 年 11 月 24 日，大阪教育大学で開催された作用素論・作用素環論研究集会において授賞式を行われ，松井氏には，賞状，賞金 30 万円およびメダルが授与されました．「作用素環賞」は平成 11 年有志の発案と寄付により，作用素環およびそれに関連する分野の若手研究者を励ます目的で設けられました．この賞は 4 年に一回，上記の分野の進展に著しく貢献した 40 歳以下の研究者で，日本国籍を持つ者か，または日本居住者で，日本の大学，研究所を主要な活躍の場としているものに授与されます．

（作用素環賞委員会委員長　河東泰之）

Laumon空間の幾何学



M. Finkelberg
（訳／柳 田　伸 太 郎）

1. 基本的性質

1.1 歴史的背景

C を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上で定義された非特異射影曲線とする．$K := \mathbb{F}_q(C)$ を C 上の有理函数体とし，A を K のアデール環とする．Langlands プログラムは $GL_n(A)$ の $L^2(GL_n(A)/GL_n(K))$ 上の表現を研究するものである．A. Weil の考察により，$GL_n(A)/GL_n(K)$ は C 上の階数 n のベクトル束にレベル構造を付加したもののモジュライ・スタックの点の集合と思える．$\mathrm{Bun}_n(C)$ で C 上の階数 n のベクトル束のモジュライ・スタックを表すことにすると，特に $L^2(GL_n(A)/GL_n(K))$ の球函数部分は $\mathrm{Bun}_n(C)$ 上の函数のなす空間と思える．1970 年代，V. Drinfeld は幾何学的 Langlands プログラムを立ち上げたが，そこでは A. Grothendieck の function-sheaf dictionary に従って $\mathrm{Bun}_n(C)$ 上の函数が構成可能層の茎での Frobenius 写像の跡と見なされている．この考え方に基づいて $GL_n(A)$ の場合の Langlands 相互律の証明が得られている．幾何学的 Langlands プログラムの大切なポイントとして，函数に対する自然な操作（例えば積分）は全て構成可能層（の複体）に対する幾何学的操作に翻訳できる一方で，幾何学的操作には函数の世界では得られない非自明なもの（例えば Goresky–MacPherson 拡大や消滅輪体）が含まれる，ということが挙げられる．

$GL_n(A)/GL_n(K)$ 上の保型的 Hecke 固有函数の例として Eisenstein 級数がある．対応する層は $\mathrm{Bun}_B(C)$ から $\mathrm{Bun}_n(C)$ への順像を用いて定義される．ここで $\mathrm{Bun}_B(C)$ は C 上の階数 n のベクトル束に（完全）旗構造を入れたものたちのモジュライ・スタックである．射 $\varpi\colon \mathrm{Bun}_B(C) \to \mathrm{Bun}_n(C)$ は固有ではないので順像も自己双対ではないが，このことが Eisenstein 級数の満たす函数等式の複雑さに反映されている．V. Drinfeld は 1980 年代初頭 ϖ の相対コンパクト化を発見し，それとは独立に G. Laumon は 1980 年代後半に別の ϖ の相対コンパクト化を発見した．前者の利点は GL_n の代りに任意の簡約群 G で考えても意味があることにあり，後者の利点は非特異性にある（実は後者は前者の特異点の small resolution になっている）．

本稿では Laumon によるコンパクト化空間に関する研究のうちのごく一部分を扱う．底曲線 C が射影直線 $\mathbf{C}$ の場合，$\mathrm{Bun}_n(\mathbf{C})$ は階数 n の自明束からなる開部分スタックを持つ．この部分スタック上での $\overline{\varpi}$ のファイバーは非特異射影多様体をなすが，それが我々の議論における主人公である．以下では基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ とする．

1.2 局所 Laumon 空間と大域 Laumon 空間

$\mathbf{C}$ 上の座標 z を一つ固定し，$v(z) = v^{-2}z$ で定まる $\mathbf{C}$ 上への $\mathbb{C}^*$ の作用を考える．固定点集合は $\mathbf{C}^{\mathbb{C}^*} = \{0, \infty\}$ となる．

n 次元ベクトル空間 W を考え，$w_1, \ldots, w_n$ をその基底とする．附随する GL_n の極大トーラスを

$T \subset G = GL_n \subset \mathrm{Aut}(W)$ と記す．さらにその 2^n 重被覆 $\widetilde{T}$ を考え，以下のように W に作用させる：$\widetilde{T} \ni \underline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ について $\underline{t}(w_i) = t_i^2 w_i$. G の旗多様体を $\mathcal{B}$ と記す．

$(n-1)$ 組の非負整数 $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_{n-1})$ に対し，Laumon の quasiflag の空間 $\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ を本稿では**大域 Laumon 空間**と呼ぶことにする．これは局所自由部分層による旗

$$0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset \mathcal{W} = W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$$

であって $\mathrm{rank}(\mathcal{W}_k) = k$ かつ $\deg(\mathcal{W}_k) = -d_k$ となるものたちのモジュライ・スタックであった．詳細は文献 9) の 4.2 節を参照して欲しい．

$\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ は次元 $2d_1 + \ldots + 2d_{n-1} + \dim \mathcal{B}$ の非特異射影多様体であることが知られている．詳しくは文献 8) の 2.10 節を参照されたい．

$\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ の局所閉部分多様体 $\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \subset \mathcal{Q}_{\underline{d}}$（$\infty \in \mathbf{C}$ に基点を持つ quasiflag の空間．本稿では**局所 Laumon 空間**と呼ぶ）も考える．$\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ がパラメトライズするのは旗

$$0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset \mathcal{W} = W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$$

であって，$\mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}$ が $\infty \in \mathbf{C}$ の近傍で部分ベクトル束であり，さらに ∞ での $\mathcal{W}_i$ のファイバーが部分ベクトル空間 $\mathrm{Span}\langle w_1, \ldots, w_i \rangle \subset W$ と一致するものたちである．

$\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ は次元 $2d_1 + \cdots + 2d_{n-1}$ の非特異準射影多様体であることが知られている．

1.3 固定点集合

群 $G \times \mathbb{C}^*$ は $\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ に自然に作用し，群 $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$ は $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ に自然に作用する．$\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ 上の $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$ 作用の固定点集合は有限である．その記述の仕方を参考文献 5) の 2.11 節に従って説明する．

$\widetilde{\underline{d}}$ を非負整数の組 $(d_{ij})_{1 \le j \le i \le n-1}$ であって $\sum_{j=1}^{i} d_{ij} = d_i$ かつ $j \le k \le i$ なら $d_{kj} \ge d_{ij}$ となるものとする．各 $\widetilde{\underline{d}}$ には次の記述で与えられる $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ 上の $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$ 固定点が対応する．

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{11} \cdot 0) w_1,$$
$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{21} \cdot 0) w_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{22} \cdot 0) w_2,$$
$$\cdots \cdots \cdots,$$
$$\mathcal{W}_{n-1} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,1} \cdot 0) w_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,2} \cdot 0) w_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,n-1} \cdot 0) w_{n-1}.$$

この固定点を以降では $[\widetilde{\underline{d}}]$ と記すことにする．

1.4 対応

$1 \le i \le n-1$ なる自然数 i と非負整数の組 $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_{n-1})$ に対し，$\underline{d} + i := (d_1, \ldots, d_i + 1, \ldots, d_{n-1})$ と定義する．対応 $\mathsf{E}_{\underline{d},i} \subset \mathcal{Q}_{\underline{d}} \times \mathcal{Q}_{\underline{d}+i}$ を次の条件を満たす旗の対 $(\mathcal{W}_\bullet, \mathcal{W}'_\bullet)$ たちのなす部分多様体として定義する：$j \ne i$ なら $\mathcal{W}_j = \mathcal{W}'_j$, 及び $\mathcal{W}'_i \subset \mathcal{W}_i$．つまり $\mathsf{E}_{\underline{d},i}$ は局所自由層の旗

$$0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{i-1} \subset \mathcal{W}'_i \subset \mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}_{i+1} \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset \mathcal{W} \tag{1}$$

であって，$k \ne i$ なら $\mathrm{rank}(\mathcal{W}_k) = k$, $\deg(\mathcal{W}_k) = -d_k$ 及び $\mathrm{rank}(\mathcal{W}'_i) = i$, $\deg(\mathcal{W}'_i) = -d_i - 1$ を満たすものたちのモジュライ空間である．詳しくは文献 5) の 3.1 節を参照して欲しい．

文献 8) の 2.10 節より，$\mathsf{E}_{\underline{d},i}$ は次元 $2d_1 + \cdots + 2d_{n-1} + \dim \mathcal{B} + 1$ の非特異射影多様体である．

以下 $\boldsymbol{p}$ 及び $\boldsymbol{q}$ で自然な射影 $\mathsf{E}_{\underline{d},i} \to \mathcal{Q}_{\underline{d}}$ 及び $\mathsf{E}_{\underline{d},i} \to \mathcal{Q}_{\underline{d}+i}$ を記す．また射 $\boldsymbol{r} : \mathsf{E}_{\underline{d},i} \to \mathbf{C}$ を次のように定義する：

$$(0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{i-1} \subset \mathcal{W}'_i \subset \mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}_{i+1} \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset \mathcal{W}) \longmapsto \mathrm{supp}(\mathcal{W}_i / \mathcal{W}'_i).$$

対応 $\mathsf{E}_{\underline{d},i}$ には，(1) で表される点でのファイバーが $\Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{W}_i / \mathcal{W}'_i)$ で与えられる自然な直線束 L_i が附随する．

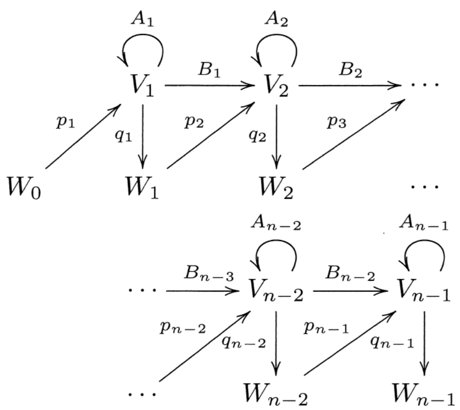
最後に，転置してできる対応を ${}^{\mathsf{T}}\mathsf{E}_{\underline{d},i} \subset \mathcal{Q}_{\underline{d}+i} \times \mathcal{Q}_{\underline{d}}$ と記すことにする．

$\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \subset \mathcal{Q}_{\underline{d}}$ に制限することで，対応 $\mathsf{E}_{\underline{d},i} \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}} \times \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i}$ とその上の直線束 L_i 及び自然な射 $\boldsymbol{p} : \mathsf{E}_{\underline{d},i} \to \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$, $\boldsymbol{q} : \mathsf{E}_{\underline{d},i} \to \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i}$, $\boldsymbol{r} : \mathsf{E}_{\underline{d},i} \to \mathbf{C} - \{\infty\}$ が得られる．転置対応 ${}^{\mathsf{T}}\mathsf{E}_{\underline{d},i} \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i} \times \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ も定義できる．${}^{\mathsf{T}}\mathsf{E}_{\underline{d},i}$ は次元 $2d_1 + \cdots + 2d_{n-1} + 1$ の非特異準射影多様体である．

1.5 箙による記述

箙による $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ の記述法は有用で, 例えばDrinfeld コンパクト化の正規性の証明に役立つ.

以下のような**手鋸箙** Q を考えよう：



線形写像たちに課す関係式は $A_{k+1}B_k - B_kA_k + p_{k+1}q_k = 0\ (k = 1, \dots, n-2)$ である. $\dim W_0 = \cdots = \dim W_{n-1} = 1$ かつ $\dim V_k = d_k\ (k = 1, \dots, n-1)$ の場合に, これらの関係式を満たす線形写像たち $(A_\bullet, B_\bullet, p_\bullet, q_\bullet)$ の集合を $\mathsf{M}_{\underline{d}}$ と記す. $\mathsf{M}^s_{\underline{d}} \subset \mathsf{M}_{\underline{d}}$ を次の安定条件を満たすものたちからなる部分集合とする：$A_\bullet$ と $B_\bullet$ の作用で保たれかつ $p_\bullet(W_\bullet)$ を含むような次数付き真部分空間 $V'_\bullet \subset V_\bullet$ は存在しない. 群 $G_{\underline{d}} := \prod_{k=1}^{n} GL(V_k)$ は自然に $\mathsf{M}_{\underline{d}}$ に作用する. この作用は $\mathsf{M}^s_{\underline{d}}$ 上で自由であり, 商 $\mathsf{M}^s_{\underline{d}}/G_{\underline{d}}$ は代数多様体の構造を持ち $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ に同型である. 詳しくは文献6) 及び11) を見て欲しい.

2. 同変 $\boldsymbol{K}$ 群への量子ループ代数の作用

この節の内容は文献1) と13) に従う. 直線束 L_i による捩りが入った対応 $\mathsf{E}_{\underline{d},i}$ は局所 Laumon 空間の局所化同変 K 群の直和上の作用素と思える. この作用素たちは量子ループ代数 $\mathbf{U}_v(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_n)$（の Drinfeld new realization）の作用を生成する. これは中島啓による箙多様体の同変 K 群への量子アフィン代数の作用の構成[10] に非常に良く似ている. 得られた作用を有限部分 $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_n) \subset \mathbf{U}_v(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_n)$ に制限すれば, 考えている加群は普遍 Verma 加群に一致する. 局所化同変 K 群の固定点に対応した基底は $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_n)$ 上の普遍 Verma 加群の Gelfand–Tsetlin 基底に他ならない. 同変 K 群の代りに通常の同変コホモロジー群を考えれば, 同じ対応たちから Yangian $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の作用が得られる[4].

2.1 同変 $\boldsymbol{K}$ 群

${}'M$ で局所 Laumon 空間の $(\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*)$ 同変（複素化）K 群の直和を記す：

$$ {}'M := \bigoplus_{\underline{d}} K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}). $$

これは 1 点の同変 K 群

$$ K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt) = \mathbb{C}[T \times \mathbb{C}^*] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, v] $$

上の加群になる. ${}'M$ の局所化とは

$$ M := {}'M \bigotimes_{K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt)) $$

のことである. M には自然な次数付け

$$ M = \bigoplus_{\underline{d}} M_{\underline{d}}, $$

$$ M_{\underline{d}} := K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}) \bigotimes_{K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt)) $$

が入る.

2.2 $\boldsymbol{M}$ 上の $\mathbf{U}_{\boldsymbol{v}}(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_{\boldsymbol{n}})$ の作用

$0 \le i \le n$ なる自然数 i に対し $\underline{\mathcal{W}}_i$ で $\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \times \mathbf{C}$ 上の tautological な i 次元ベクトル束を記す. Künneth 公式により

$$ \begin{aligned} & K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \times \mathbf{C}) \\ &= K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}) \otimes 1 \oplus K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}) \otimes \tau \end{aligned} $$

となる. ここで $\tau \in K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{C})$ は $\mathcal{O}(1)$ の同変 K 群での類である.

この分解より外積 $\Lambda^j(\underline{\mathcal{W}}_i)$ を

$$ \Lambda^j(\underline{\mathcal{W}}_i) = \Lambda^j_{(j)}(\underline{\mathcal{W}}_i) \otimes 1 + \Lambda^j_{(j-1)}(\underline{\mathcal{W}}_i) \otimes \tau $$

と表せる. ここで $\Lambda^j_{(j)}(\underline{\mathcal{W}}_i)$ と $\Lambda^j_{(j-1)}(\underline{\mathcal{W}}_i)$ は共に $K^{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$ の元である.

次に $0 \le m \le n$ なる自然数 m に対して $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ の同変 K 群に係数を持つ級数 $\boldsymbol{b}_m(z)$ を次のよう

に定義する：

$$\boldsymbol{b}_m(z) := 1+ \sum_{1\le j\le m} (-z)^{-j}\left(\Lambda^j_{(j)}(\underline{\mathcal{W}}_m) - v\Lambda^j_{(j-1)}(\underline{\mathcal{W}}_m)\right).$$

特に $\boldsymbol{b}_0(z) := 1$ と約束する．

v で $\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*$: $(\underline{t}, v)\mapsto v$ の指標を記す．対応 $\mathsf{E}_{\underline{d},k}$ 上の同変直線束 $L'_k := v^k L_k$ を考える．L'_k と L_k は直線束としては同型であり，L'_k の同変構造は L_k の同変構造を指標 v^k で捩ったものである．

さらに作用素

$$e_{k,r} := t^{-1}_{k+1} v^{d_{k+1}-d_k+1-k}\boldsymbol{p}_*((L'_k)^{\otimes r}\otimes \boldsymbol{q}^*)$$

及び

$$f_{k,r} := -t^{-1}_k v^{d_k-d_{k-1}-1+k}\boldsymbol{q}_*(L_k\otimes(L'_k)^{\otimes r}\otimes\boldsymbol{p}^*)$$

を考える．$e_{k,r}: M_{\underline{d}}\to M_{\underline{d}-k}$ 及び $f_{k,r}: M_{\underline{d}}\to M_{\underline{d}+k}$ に注意する．

そして次のような M 上の作用素の級数を考える：

$$x^+_k(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_{k,r}z^{-r}:\ M_{\underline{d}}\to M_{\underline{d}-k}[[z^{\pm1}]],$$

$$x^-_k(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{k,r}z^{-r}:\ M_{\underline{d}}\to M_{\underline{d}+k}[[z^{\pm1}]].$$

また以下の級数も考える：

$$\psi^+_k(z)\,|_{M_{\underline{d}}} = \sum_{r=0}^{\infty}\psi^+_{k,r}z^{-r}$$
$$:= t^{-1}_{k+1}t_k v^{d_{k+1}-2d_k+d_{k-1}-1}\big(\boldsymbol{b}_k(zv^{-k-2})^{-1}\boldsymbol{b}_k(zv^{-k})^{-1}\boldsymbol{b}_{k-1}(zv^{-k})\boldsymbol{b}_{k+1}(zv^{-k-2})\big)^+,$$

$$\psi^-_k(z)\,|_{M_{\underline{d}}} = \sum_{r=0}^{-\infty}\psi^-_{k,r}z^{-r}$$
$$:= t^{-1}_{k+1}t_k v^{d_{k+1}-2d_k+d_{k-1}-1}\big(\boldsymbol{b}_k(zv^{-k-2})^{-1}\boldsymbol{b}_k(zv^{-k})^{-1}\boldsymbol{b}_{k-1}(zv^{-k})\boldsymbol{b}_{k+1}(zv^{-k-2})\big)^-.$$

ここで $()^+, ()^-$ は各々 $z=\infty, 0$ での展開を意味する．$\psi^{\pm}_k(z)\,|_{M_{\underline{d}}}\in M_{\underline{d}}[[z^{\mp1}]]$ に注意する．

定理 2.1. 上で定義された M 上の作用素 $\psi^{\pm}_k(z), x^{\pm}_k(z)$ は $\mathbf{U}_v(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_n)$ の関係式を満たす．つまりこれらの作用素は M 上の $\mathbf{U}_v(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_n)$ の作用を導く．

定義 2.2. 非負整数の組 $\underline{\widetilde{d}} = (d_{ij})_{1\le j\le i\le n-1}$ に対してウェイトの組 $(s_{ij})_{1\le j\le i\le n-1}$ を $s_{ij} := t^2_j v^{-2d_{ij}}$ で定める．

命題 2.3. **a)** 作用素 $f_{i,r}, e_{i,r}$ の固定点基底 $\{[\underline{\widetilde{d}}]\}$ に関する行列要素は以下の通り．ある $j\le i$ に対し $d'_{i,j} = d_{i,j}+1$ なら

$$f_{i,r[\underline{\widetilde{d}},\underline{\widetilde{d}}']} = -t^{-1}_i v^{d_i-d_{i-1}-1+i}(1-v^2)^{-1} \times s_{i,j}(s_{i,j}v^i)^r \times \prod_{j\ne k\le i}(1-s_{i,j}s^{-1}_{i,k})^{-1} \times \prod_{k\le i-1}(1-s_{i,j}s^{-1}_{i-1,k}),$$

ある $j\le i$ に対し $d'_{i,j} = d_{i,j}-1$ なら

$$e_{i,r[\underline{\widetilde{d}},\underline{\widetilde{d}}']} = t^{-1}_{i+1} v^{d_{i+1}-d_i+1-i}(1-v^2)^{-1} \times (s_{i,j}v^{i+2})^r \times \prod_{j\ne k\le i}(1-s_{i,k}s^{-1}_{i,j})^{-1} \times \prod_{k\le i+1}(1-s_{i+1,k}s^{-1}_{i,j}),$$

その他の $e_{i,r}, f_{i,r}$ の行列要素は全て 0.

b) 各 $\{[\underline{\widetilde{d}}]\}$ は $\psi^{\pm}_i(z)$ の固有ベクトルであり，その固有値は

$$t^{-1}_{i+1}t_i v^{d_{i+1}-2d_i+d_{i-1}-1} \times \prod_{j\le i}(1-z^{-1}v^{i+2}s_{i,j})^{-1}(1-z^{-1}v^i s_{i,j})^{-1} \times \prod_{j\le i+1}(1-z^{-1}v^{i+2}s_{i+1,j}) \times \prod_{j\le i-1}(1-z^{-1}v^i s_{i-1,j}).$$

3. 差分方程式, q-Whittaker 函数と Macdonald 多項式

3.1 q 差分戸田方程式

以下ではトーラスの座標として $q = v^2$ 及び $z_i = t_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$ を用いる．正則函数環 $\mathbb{C}[\mathfrak{Q}_{\underline{d}}]$ の指標は $(\mathbb{C}^* \times T)$ 上の有理函数 $\mathfrak{J}_{\underline{d}}(q, z)$ で表される．自然数 $i = 1, \ldots, n-1$ に対し ω_i を $SL_n \subset G = GL_n$ の極大トーラスの基本指標とする．不定元 $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_{n-1}$ を用意し，$\mathsf{Q}^{\underline{d}} := \mathsf{Q}_1^{d_1} \cdots \mathsf{Q}_{n-1}^{d_{n-1}}$ と定める．そして形式的級数

$$J(q, z, \mathsf{Q}) := \sum_{\underline{d}} \mathsf{Q}^{\underline{d}} \mathfrak{J}_{\underline{d}},$$

$$\mathfrak{J}(q, z, \mathsf{Q}) := J(q, z, \mathsf{Q}) \prod_{i=1}^{n-1} \mathsf{Q}_i^{\log \omega_i / \log q}$$

を導入する．また $k = 1, \ldots, n$ に対し差分作用素

$$\begin{aligned} &\mathsf{T}_k(F(q, z, \mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_{n-1})) \\ &:= F(q, z, \mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_{k-2}, q^{-1}\mathsf{Q}_{k-1}, \\ &\qquad q\mathsf{Q}_k, \mathsf{Q}_{k+1}, \ldots, \mathsf{Q}_{n-1}) \end{aligned}$$

を考える．但し $\mathsf{Q}_0 := \mathsf{Q}_{n-1}$ と約束する．

以下の定理は，文献 1) において，局所 Laumon 空間の局所化同変 K 群と $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_n)$ の普遍 Verma 加群とが同一視できることの結果として示された．

定理 3.1. 作用素 $\mathfrak{S}$ を

$$\mathfrak{S} := \mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2(1 - \mathsf{Q}_1) + \cdots + \mathsf{T}_n(1 - \mathsf{Q}_{n-1})$$

で定義すると

$$\mathfrak{S}\mathfrak{J}(q, z, \mathsf{Q}) = (z_1 + \cdots + z_n)\mathfrak{J}(q, z, \mathsf{Q}).$$

3.2 q-Whittaker 函数

上で導入した不定元 Q を $(n-1)$ 次元トーラス $\check{T}$ 上の座標と見なし，さらに $\check{T}$ を $SL_n \subset G = GL_n$ の極大トーラスの双対と思うことにする．SL_n のウェイト $\lambda \in \Lambda$ について，q^λ は $\check{T}$ の元と見なすことができる．実際，単純ルートを使って λ を $\lambda = a_1\alpha_1 + \cdots + a_{n-1}\alpha_{n-1}$ と表せば，$q^\lambda = \mathsf{Q}_1^{a_1} \cdots \mathsf{Q}_{n-1}^{a_{n-1}}$ となる．こうして差分作用素 $\mathfrak{S}$ を格子 $q^\Lambda \subset \check{T}$ 上の函数に作用させることができる．次の命題は文献 7) で示された．

命題 3.2. 以下の性質を満たす $z \in T$ の $\mathbb{C}(q)$ 値多項式 $\Psi_\lambda(q, z)$ が唯一存在する．

a) λ がドミナントでなければ $\Psi_\lambda(q, z) = 0$,

b) $\Psi_0(q, z) = 1$,

c) $\{\Psi_\lambda(q, z) \mid \lambda \in \Lambda\}$ をまとめて一つの $z \in T$ の函数 $\Psi(q, z) : \Lambda \to \mathbb{C}(q)$ と見なすと

$$\mathfrak{S}\Psi(q, z) = (z_1 + \cdots + z_n)\Psi(q, z),$$

d) 多項式 $\Psi_\lambda(q, z)$ は対称.

3.3 大域 Laumon 空間上の直線束の大域切断

$\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ の点 $(0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset W \otimes \mathcal{O}_\mathbf{C})$ に対し次数 $(-d_i)$ の可逆部分層 $\Lambda^i\mathcal{W}_i \subset \Lambda^i W \otimes \mathcal{O}_\mathbf{C}$ を考える $(i = 1, \ldots, n-1)$．この部分層は $\mathbb{P}\Gamma(\mathbf{C}, \Lambda^i W(d_i))$ の点と思えるので，射影射 $\pi: \mathcal{Q}_{\underline{d}} \to \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\Gamma(\mathbf{C}, \Lambda^i W(d_i))$ を得る．実は π の像は，$\mathbf{C}$ から $\mathcal{B}$ への次数 $\underline{d}$ の写像の空間の Drinfeld コンパクト化になる．SL_n の基本指標 ω_i を思い出そう．ウェイト $\lambda = l_1\omega_1 + \cdots + l_{n-1}\omega_{n-1}$ に対し $\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ 上の直線束 $\mathcal{O}(\lambda)$ を $\pi^*(\mathcal{O}(l_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{O}(l_{n-1}))$ で定義する．$\psi_\lambda(q, z)^{\underline{d}}$ を $\mathcal{O}(\lambda)$ の同変 Euler 指標 $\chi(\mathcal{Q}_{\underline{d}}, \mathcal{O}(\lambda))$ とする．これは $(\mathbb{C}^* \times T)$ 上の有理函数と思える．実は $\underline{d}$ が増大すると $\psi_\lambda(q, z)^{\underline{d}}$ の q 展開の係数が安定するので，極限をとって函数 $\psi_\lambda(q, z)$ を定義することができる．次に述べるのは文献 2) で定理 3.1 から導かれた定理である．

定理 3.3. $\psi_\lambda(q, z) = \Psi_\lambda(q, z)$.

3.4 Macdonald 差分作用素

この副節では 3.1 節の t 類似を考える．ここで変数 t は Laumon 空間の de Rham 複体の次数を数えるものである．まず

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{\underline{d}}(q, t, z) &= [H^\bullet(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}, \Omega^\bullet_{\mathfrak{Q}_{\underline{d}}})] \\ &:= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} t^j [H^i(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}, \Omega^j_{\mathfrak{Q}_{\underline{d}}})] \end{aligned}$$

と置く．ここで $[H^i(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}, \Omega^j_{\mathfrak{Q}_{\underline{d}}})]$ は $H^i(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}, \Omega^j_{\mathfrak{Q}_{\underline{d}}})$ の $(\mathbb{C}^* \times T)$ 加群としての指標，つまり $q \in \mathbb{C}^*$ と $z \in T$ の函数，を意味する．さらに既に導入してある不定元 Q を用いて

$$J(q,t,z,\mathsf{Q}) := \sum_{\underline{d}} \mathsf{Q}^{\underline{d}} \mathfrak{J}_{\underline{d}}(q,t,z),$$

$$\mathfrak{J}(q,t,z,\mathsf{Q}) := J(q,t,z,\mathsf{Q}) \prod_{i=1}^{n-1} \mathsf{Q}_i^{\log(\omega_i)/\log q}$$

と置く．次の定理は文献3) で直接計算により証明された．尚，文献12) は局所 Laumon 空間の局所化同変コホモロジー上の $U(\mathfrak{sl}_n)$ の作用を用いて，次の定理のコホモロジー版の公式を導出している．

定理 3.4. 作用素 D を

$$\mathsf{D} := \sum_{i=1}^{n} \prod_{j<i} \frac{1-q^{-1}t^{i-j-1}\mathsf{Q}_j \cdots \mathsf{Q}_{i-1}}{1-t^{i-j}\mathsf{Q}_j \cdots \mathsf{Q}_{i-1}} \times \prod_{k>i} \frac{1-qt^{k-i+1}\mathsf{Q}_i \cdots \mathsf{Q}_{k-1}}{1-t^{k-i}\mathsf{Q}_i \cdots \mathsf{Q}_{k-1}} \mathsf{T}_i^{-1}$$

と定義すると，

$$\mathsf{D}\mathfrak{J}(q,t,z,\mathsf{Q}) = (z_1 + \cdots + z_n)\mathfrak{J}(q,t,z,\mathsf{Q}).$$

3.5 Macdonald 多項式

Macdonald 多項式 $P_\lambda(q,t,z)$ はドミナントウェイト λ と2変数 q,t に依存する $z \in T$ の対称多項式であった．次に述べる定理は文献3) において定理3.4から導かれたものである．

定理 3.5. a) ウェイト $\lambda \in \Lambda$ はドミナントでないと仮定する．$j,k \in \mathbb{N}$ を固定する．この時十分大きい $\underline{d}$ に対して次が成立する．

$$H^k(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}, \Omega^j_{\mathfrak{Q}_{\underline{d}}} \otimes \mathcal{O}(\lambda)) = 0.$$

b) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について極限

$$\lim_{\underline{d}\to\infty} [H^\bullet(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}, \Omega^\bullet_{\mathfrak{Q}_{\underline{d}}} \otimes \mathcal{O}(\lambda))]$$

が存在する．この極限を $H_\lambda(q,t,z)$ と記す．主張a) より λ がドミナントでなければ $H_\lambda = 0$ であることに注意する．

c) $$H_0(q,t,z) = \frac{(1+t)(1+t+t^2)\cdots}{(1-t^{n-1})^2(1-t^{n-2})^4\cdots} \frac{\cdots(1+t+\cdots+t^{n-1})}{\cdots(1-t^3)^{2n-6}(1-t^2)^{2n-4}} \times \frac{1}{(1-t^n)(1-t)^{n-2}}.$$

d) $\lambda = \sum l_i \omega_i$ がドミナントウェイトなら

$$H_\lambda = P_\lambda H_0 \prod_{1\le i\le j\le n-1} \frac{(t^{j-i+1};q)_{l_i+\cdots+l_j}}{(t^{j-i}q;q)_{l_i+\cdots+l_j}}.$$

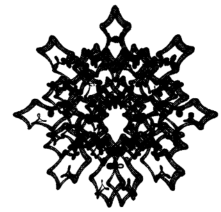
つまり H_λ は明示的に書ける因子を除いて Macdonald 多項式 P_λ と一致する．

参考文献

1) A. Braverman, M. Finkelberg, Finite difference quantum Toda lattice via equivariant K-theory, *Transformation Groups* **10** (2005), 363–386.
2) A. Braverman, M. Finkelberg, Weyl modules and q-Whittaker functions, arXiv:1203.1583.
3) A. Braverman, M. Finkelberg, J. Shiraishi, Macdonald polynomials, Laumon spaces and perverse coherent sheaves, arXiv:1206.3131.
4) B. Feigin, M. Finkelberg, A. Negut, L. Rybnikov, Yangians and cohomology rings of Laumon spaces, *Selecta Math.*, New Series **17** (2011), 573–607.
5) M. Finkelberg, A. Kuznetsov, Global Intersection Cohomology of Quasimaps' spaces, *Intern. Math. Res. Notices* **7** (1997), 301–328.
6) M. Finkelberg, L. Rybnikov, Quantization of Drinfeld zastava in type A, arXiv:1009.0676.
7) A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin, On q-deformed $\mathfrak{gl}_{l+1}$-Whittaker function. I, II, *Comm. Math. Phys.* **294** (2010), 97–119, 121–143.
8) G. Laumon, Un Analogue Global du Cône Nilpotent, *Duke Math. Journal* **57** (1988), 647–671.
9) G. Laumon, Faisceaux Automorphes Liés aux Séries d'Eisenstein, *Perspect. Math.* **10** (1990), 227–281.
10) H. Nakajima, Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras, *Journal of the AMS* **14**, no.1 (2001), 145–238.
11) H. Nakajima, Handsaw quiver varieties and finite W-algebras, arXiv:1107.5073.
12) A. Negut, Laumon spaces and the Calogero-Sutherland integrable system, *Inv. Math.* **178** (2009), 299–331.
13) A. Tsymbaliuk, Quantum affine Gelfand-Tsetlin vases and quantum toroidal algebra via K-theory of affine Laumon spaces, *Selecta Math.*, New Series **16** (2010), 173–200.

（ミハイル・フィンケルベルグ，
ロシア国立研究大学経済高等学校）
（やなぎだ・しんたろう，京都大学数理解析研究所）

量子群と関数環



戸松　玲治

1. 量子群との関わり始め

修士1年目2001年秋の終わり頃, von Neumann環の一応の基礎を学び終え, 次に量子群を勉強することにしました．インターネットで検索したところ, 局所コンパクト量子群がKustermansとVaesによって少し前に定式化されたことが分かりました．作用素環論にはKac環と呼ばれる量子群が昔からあったのですが, q 変形した量子群を持ち込んだのはWoronowiczです．しかしその頃は, 局所コンパクト量子群の一般論（非有界自己共役作用素のオンパレード）を学ぶのに神経をすり減らしていたのでWoronowiczの仕事は全く意識していませんでした．

量子群についての修士論文をVaesの元に送ってみたところ,「いくつかの結果はWoronowiczがすでに証明している」と指摘され, Woronowiczの論文を真面目に読もうとようやく決心しました．

本当は河東先生とJones[6], 竹崎先生とConnes[5]のように, Woronowiczとのそれから始まる懐かしい思い出等々を書き連ねると面白いコラムに仕上がるところなのですが, あいにくそのような個人的なつながりはありませんので大変困っているところです[*1]．そこで多少量子群に携わって来た者として, これまでの歴史を簡単に紹介してみます．

2. Woronowiczの $SU_q(2)$

MathSciNetで調べてみたところ, Woronowiczの最初の論文は1964年に出版されており, それから主に作用素環と物理との関係で論文を書き続けています．そしてどうやら1980年頃から非可換位相空間や量子群などの考察を始めているようです．Woronowiczの仕事には独特な色彩をもつものが多く, 昔に書かれたものであっても, 研究の余地を残すものもたくさんあるように感じています．

試行錯誤の結果, ついに1987年の論文[2]において作用素環論的な量子群 $SU_q(2)$ を生み出します．Woronowiczのアイデアはこうです．コンパクト群 $SU(2)$ は 2×2 のユニタリ行列で行列式が1となるものの集まりです．Woronowiczは 2×2 行列の各成分を位相空間 $SU(2)$ 上の関数とみなして, 変形の対象を位相群 $SU(2)$ そのものではなく, 連続関数環 $C(SU(2))$ に見定めました．そうして非可換な C^* 環 $C(SU_q(2))$ を構成し, $SU_q(2)$ の既約表現やfusion則を調べました．

ところで $SU_q(2)$ のfusion則というと個人的に思い出すのは, 修士課程の学生だった私が東大数理の図書館で文献をコピーしていたとき, 研究室の先輩のSさんから「$SU_q(2)$ なんて表現も分類されていて, fusionも $SU(2)$ とおんなじだし, やることもうないんじゃないの？」なんて言われたエピソードです．そのときは「そうなのかなあ」なんて思ったりもしましたが, 2, 3年後 $SU_q(2)$ の「仮想的な等質空間」の分類を行っているとき,「誰だ $SU_q(2)$ はもう終わっただなんて言ったのは！」と心の中でよく罵っていたものです（Sさんごめんなさい）．

話が少し脇道にそれてしまいました（そのほう

*1)　話したことはあります．

が面白いかもしれませんけど）．Woronowiczはその後，行列擬群（量子コンパクトLie群みたいなもの）[3]，$SU_q(N)$ の定義，行列擬群上の解析，量子ローレンツ群等々立て続けに重要な論文を出版しました．特にコンパクト量子群の一般論を素朴な定義から展開した論文[4]はこの分野の基本的な文献です．そこにはWoronowiczと半袖短パン姿のConnesが議論している写真も掲載されていて，その点においても一読（一見？）の価値があるものです．Connesはこのとき非可換空間の対称性を量子群に見ていたのでしょう．

3. 作用素環と量子群のそれから

最後に作用素環論的な量子群のそれからの発展を述べて終わりたいと思います．

Woronowiczのコンパクト量子群を一般化する形で，Kustermans–Vaesにより局所コンパクト量子群の理論が構築されました．これが現在最も広く受け入れられている量子群の定義です．そうではあるのですが，Haar測度に相当するものの存在を仮定するという難点があります．

局所コンパクト量子群からは乗法的ユニタリと呼ばれる特別な作用素ができます（Kac–竹崎作用素の一般化）．これは量子群と双対量子群とを結ぶ架け橋となっていて，実質的には量子群の性質をすべて決定してしまうほどの重要なユニタリです．Woronowiczは逆の問題，つまりどんな乗法的ユニタリが量子群からくるかについて数編の論文において考察しています．これはまだ完全に答えの出ていない興味深い話題であると思います．

他のタイプのLie群の変形についても整理されています．標準的テキスト[1]を参照してください．

Van Daele–Wangによる普遍量子群や，その亜流とも言える量子対称群やeasy量子群[*2]もBanicaを中心として特にヨーロッパで人気があります．

*2） テンソル圏のとある条件としてeasyと称していて，決してeasyな対象ではないのだとBanicaは言っていました．

また離散量子群（コンパクト量子群の双対）を離散群の一般化とみなして，離散群の性質を離散量子群に移行する研究も行われています．特にここ十数年は離散群と関連した作用素環の研究が大発展している時期であり，このような試みは今後もしばらく続いていくであろうと思われます．

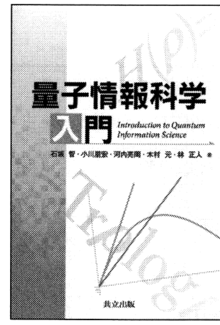
翻って日本ではどうであったのでしょう．以前，東北大学に作用素環論の強力な研究グループがあり，世界レベルの人材や結果を出し続けていました．日本人が他国の人に比べて群の作用に強いこだわりを持つ（人も多い）のもこの影響が大であると思われます．量子群の作用素環への作用の研究では，植田好道氏による自由積von Neumann環への $SU_q(2)$ の極小作用の構成があります．従順因子環上に極小作用を構成できるかどうかが気になるところですが，未解決のままです．

また泉正己氏による，離散量子群上のランダムウォークの非可換Poisson境界と無限テンソル積型作用の関係についての成果も重要です．具体例の計算は結構なされているのですが，まだ他にも研究することがいくつもあるように感じています．

参考文献

1) Korogodski, L.I., Soibelman, Y.S. *Algebras of functions on quantum groups. Part I*, Mathematical Surveys and Monographs, 56. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. x+150 pp.
2) Woronowicz, S.L. Twisted $SU(2)$ group. An example of a noncommutative differential calculus, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **23** (1987), 117–181.
3) Woronowicz, S.L. Compact matrix pseudogroups, *Comm. Math. Phys.* **111** (1987), 613–665.
4) Woronowicz, S.L. Compact quantum groups, Symétries quantiques (Les Houches, 1995), 845–884, North-Holland, Amsterdam, 1998.
5) 竹崎正道，「John von Neumann から Alain Connes へ—冨田・竹崎理論を経て」，数理科学，2012年5月号，56–57.
6) 河東泰之，「von Neumann, Connes そして Jones」，数理科学，2012年5月号，58–59.

（とまつ・れいじ，北海道大学大学院理学研究院）



量子情報科学入門

石坂智・小川朋宏・河内亮周・木村元・林正人共著，A5 判，376 頁，本体 3800 円，共立出版

情報処理技術についての話をするとき，実際に情報を処理するハードウェアの特性やそれを実現するデバイスの物理的特性を念頭に置くことはないだろう．そういった部分はブラックボックス化され，そのブラックボックスの妥当なモデルについて合意が得られているため，ブラックボックスの内部特性は考慮されない．逆に，そのような抽象化の恩恵により高度な洞察を可能とし，今日の情報科学の発展に寄与している．一方で，デバイス技術の発達に伴い，量子力学的効果の影響が無視できないものになってきている．現行のモデルはそのような効果を許容しないため，量子力学的効果を抑制する機構を導入することにより現行モデル内での議論が成り立つようにしている．この状況は情報処理技術に対して足枷を課されている状態である．従来の情報処理にとって不都合な量子力学的効果を逆に積極的に利用することで，情報処理の可能性が広がり得る．量子情報科学は量子力学的効果を考慮に入れた情報処理の可能性の探究を目的としている．

本書は新しい情報科学の枠組みである量子情報科学の入門書である．情報科学自体が広範な学術領域であり，その量子版とて広範な学術領域になるのが必至であるが，量子力学的効果が効果的に発揮されているトピックをバランスよく選定し，量子情報科学の魅力を広くアピールしている．初学者向けとしては，網羅的な教科書よりも，本書のようなコンパクトに魅力が凝縮された，それでいて，基礎的・本質的な命題については証明がしっかりと与えられているスタイルは有益であろう．効果的に演習問題が与えられ，解答もきちんと与えられていることもあり，独学するにもセミナーなどで利用するにしても，教育的配慮が十分になされているのは嬉しい．

本書が，第 0 章として量子情報科学の意義を述べることにページを割いている点に刮目したい．従来の情報処理に対する視点を新たな角度から捉え直すことにより，量子情報科学の必然性を鮮明に描いている．さらに，今後の量子情報科学の将来展望や量子情報科学から物理学への新展開を述べるなど，著者ら量子情報科学研究の先駆者としての気概や情熱が感じられる．

第 1 章では，簡略化された量子論の定式化が，物理学の前提知識が無くとも分かり易いように，ベクトルと行列演算を用いて与えられている．第 3 章までは，ここで与えられる定式化で十分であり，必要以上にハードルが高くならないように配慮がなされている．

第 2 章では，古典論理回路のアナロジーから量子回路が説明され，第 3 章は，量子コンピュータ上で動作する基本的なアルゴリズムとして押さえておきたい Deutsch-Jozsa アルゴリズム，探索問題に対する Grover アルゴリズム，効率的に素因数分解を行う Shor アルゴリズムを紹介している．

第 4 章は，第 1 章よりも厳密な定式化を与えるとともに，より進んだ量子力学の構造について説明がなされている．特に，ノイズがある場合の量子情報処理を扱えるような枠組みが与えられている．また，第 5 章は，エントロピー概念は量子系においてもまた重要であることを再確認させてくれる．

第 6 章では，量子テレポーテーション，超稠密符号，量子データのエンタングルに関連した量子情報処理が紹介されている．量子情報処理の鍵概念である「局所操作＋古典通信」が説明され，さらに，量子エンタングルメントがいかに定量化されるか議論されている．

第 7 章では古典情報を，第 8 章では量子情報を，量子通信路で伝送する問題を扱っている．古典通信路符号化と仮説検定との関連から，量子仮説検定を介した量子通信路符号化についての議論がなされている．代数的な古典符号の発展として量子誤り訂正符号が説明され，それを元に量子通信路を用いた古典情報の秘匿通信が考察され，そして，量子暗号の安全性について議論されている．

いずれの章も十分に濃密な議論がなされ，量子情報科学の学修を目指す初学者へのよい教材になることは間違いない．そして，ある程度学んでも側に置いておきたい必携の書にもなるだろう．

小柴　健史（埼玉大学大学院理工学研究科）



明解 ゼータ関数と リーマン予想

Riemann's Zeta Function

ハロルド・M・エドワーズ著，鈴木治郎訳，A5 判，345 頁，本体 4500 円，講談社

1859 年，ベルリン学士院月報にベルンハルト・リーマン（Bernhard Riemann）の 8 頁の論文「与えられた数より小さな素数の個数について」が発表された．非負実数 x 以下の正の素数の個数を $\pi(x)$ と書こう．上の論文でリーマンは $J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\pi(x^{1/n})$ を詳しく分析する．メビウスの関数 $\mu(n)$ を用いれば $\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-1}J(x^{1/n})$ と書けるから，$J(x)$ の性質から $\pi(x)$ の性質を得ることができるであろう．リーマンは $J(x)$ を今日呼ぶところのリーマンのゼータ関数 $\zeta(s) = \prod_p \left(1-p^{-s}\right)^{-1}$ $(\mathrm{Re}\, s > 1)$ と関係付ける．即ち素数 p と自然数 n 上の和を用いて $J(x) = 2^{-1}\left(\sum_{p^n<x} n^{-1} + \sum_{p^n\leq x} n^{-1}\right)$ と書けば

$$\log\zeta(s) = s\int_0^{\infty} J(x)x^{-s}\frac{dx}{x} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

と書けるから，フーリエ逆変換を行って $(a > 1)$

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \log\zeta(s)\cdot x^s\frac{ds}{s}$$

を得る．ところでオイラーのガンマ関数 $\Gamma(s)$ を用いて $\xi(s) = (s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ とおけば，これは全複素平面上へ正則関数として解析接続され，関数等式 $\xi(1-s) = \xi(s)$ をもつ．そこで $\xi(s)$ の零点 ρ 上の積公式 $\xi(s) = \xi(0)\cdot\prod_\rho\left(1-\rho^{-1}s\right)$ から公式

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\mathrm{Im}\,\rho>0}\left\{\mathrm{Li}(x^\rho) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho})\right\} + \int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t} + \log\xi(0)$$

を得る．ここで $\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\log t}\right)$ は対数積分である．$J(x)$ の公式の第一項のみをとって $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)n^{-1}\mathrm{Li}(x^{1/n})$ をみると，これは $\pi(x)$ の非常に良い近似を与えることが経験的にわかり，「ガウスの素数定理」$\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x)$ を精密化したものとみなせる．以上が上記リーマンの論文の主張であるが，論文中には幾つかの肝心な点で証明はおろかそれを示唆するものも示されてはいない．特に論文の主張の証明には直接必要無いがと断りつつ，特段の論拠を示すでもなく $\xi(s)$ の零点は全て直線 $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ 上にあることは「非常にもっともらしい」と書いてあって，これが有名な「リーマン予想」の起源である．

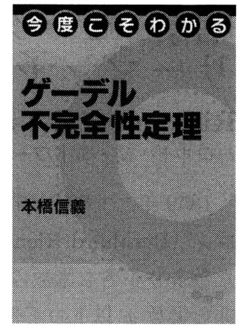
本書では上記リーマンの論文の詳細な分析から始めて，リーマンが証明を示さなかった部分がどのように証明されたか，特に $\xi(s)$ の積公式の証明，素数定理の証明，$0 < \mathrm{Im}\, s < T$ なる $\xi(s)$ の零点の個数の評価式の証明，いわゆるリーマン・ジーゲルの公式の発見，$\mathrm{Re}\, s = 1/2$ 上の $\xi(s)$ の零点の個数の評価，について，歴史的な背景説明や著者の個人的な意見を含めつつ，完全な証明が与えられる．リーマン予想をめぐる数値実験については，$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(1/2+it)$ の近似計算で具体的な数字を示しつつ，$Z(t)$ が非常に小さな正の極小値をとりそうになって，危うくリーマン予想の反例が見つかりそうになる話はスリルがある．リーマンのゼータ関数に関する本では E.C. Titchmarsh の “The Theory of the Riemann Zeta-function” が良く知られていて，数学的には洗練されていると思うが，本書のほうが読んでいて楽しい，というのが評者の感想である．その意味で本書は名著であると思う．

著者は序文で数学を学ぶ者は古典を読めという．本書について言えば，僅か 8 頁の論文に込められたリーマンの洞察に学べということだろう．常に古典にインスピレーションを見出したヴェイユ（A. Weil）の台詞をもじって言えば「ヴェイユのように始めろ．そうすれば間もなく自分がヴェイユではないことを発見するだろうが，それでもよい．とにかくヴェイユのようにやれ」となるだろうか．今日のように進歩，あるいは変化，の激しい時代にあってもこれは依然として真理であり，また実践可能なことであると信じたい．

リーマンのゼータ関数を詳しく知りたいという程の教養の持ち主であれば，原著の英語を読むことにそれ程の困難は覚えまい．とはいえ母国語で読めることはやはり嬉しいことである．さらに本訳書が一巻に納まったのは読者として歓迎したい．本文の活字のポイントを少し小さくしたのは，訳者，出版社の歓迎すべき英断だと思う．英語の論理的明快さを日本語に訳出するのにご苦労があったろうと推察する．残念なことに若干誤訳と思われる箇所が散在しているので，改版（評者はそれを信じるが）の際に訂正が行われることを期待する．

髙瀬　幸　一（宮城教育大学教育学部）

今度こそわかる
ゲーデル不完全性定理



本橋信義著，A5 判，171 頁，本体 2700 円，講談社

“ゲーデルの不完全性定理”（実際には二つの定理からなる）は，その名称のゆえだろうか，人々を惹きつけるようだ．他方一般の数学者が特にそれに興味を示したという話を私は聞いたことがない．

ゲーデルの不完全性定理は「数学の形式化された（無矛盾な）体系の不完全さ」を述べている数学の定理であり，定理とは証明によって正しさを保証された陳述（statement）のことだ．ゲーデルの不完全性定理とその証明を理解するためには，数学の形式化や自然数による記号のコーディングなどの数理論理学における知識とある程度の技術的経験を要する．

ゲーデルの原論文にはそれらについても，また証明のステップもていねいに記述されているので，基本的な知識と経験を持っていれば一通りの理解はそれほど難しくないといえる．

しかし，ある定理の証明を一応理解したとして，その定理と証明をどのように「感じとれるか」は別問題だ．ほんとうの理解は「感じとれる」（腑に落ちる）ことまで含む．さらにこの定理は読者に解釈の余地を与えるという特殊性を持つ．それゆえに「腑に落ちる」ことが特に重要であることは後述する．先走っていえば，その解釈の際には何か前提が必要で，前提なしに「数学は不完全だ」などという結論を導いてはいけない．「人間の知の限界を示す」などはもってのほかだ．

書評対象である本書の著者は以上の諸事情を十分考慮の上で，本書を執筆されたのだと思う．本書では「不完全性定理がそもそも何を意味しているのかわからない，それでもわかりたい」潜在的読者のために，基本知識にギャップを作らず，また証明の構成を明らかにする配慮がなされている．例えば形式言語とは何か，から始めて，形式化の方法など不完全性定理の記述と証明に必要なすべての概念を順序だてて導入している．多くの準備の後に二つの不完全性定理が述べられ，その証明の最終段階が示される．

証明の構成はゲーデルのオリジナルとはかなり形が異なり，補助定理を重ねて最終証明にいたる．ゲーデルの論文発表以来 80 年の間には，その本質を抽出して証明の再構成が行われてきた，その流れである．

用語や論理に関する諸事項の見方には著者独自のものが多い．本書でゲーデルの不完全性定理およびその証明を「今度こそ」理解するためには，それらになじむ努力を惜しまない必要がある．

ところで，本書にもゲーデルの定理にも限られることではないが，数学の証明をほんとうに「わかる」ためには，用語，定義，概念，規則など諸々の事項が「自分のもの」になることが第一条件だ．それには時間がかかる．なじみの無い分野の数学の内容を論理的に追うことができるだけでなく「腑に落ちる」まで「わかる」ためには，多少の奮闘努力が必要だ．ていねいな説明があるからすらすら読めた，とはいかないことが多い．

ゲーデルの不完全性定理の理解に際して「腑に落ちる」ことは特に重要である．なぜならば，この定理も証明も一般の数学活動の場への応用がほとんどないからだ（数理論理学においては，歴史的意義とともにその斬新な手法が大きな影響を与えた）．不完全性定理は上述のように素っ気ないものであり，もとの証明は様々な理論を援用しているのでもなく，実は筋道がはっきりしていて自己充足的なものである．その価値はむしろ歴史的な背景によるところが多い．この定理が興味を持たれるのは，数学的というよりは「不完全性」という表現が心に響き，また各人の数学観を前提として思索し各人の結論を出せるからだろう．そのような自由度があるからこそ，この定理を，そしてその証明を，「わかる」とはどういうことか，またどのように「わかりたい」のか，について，本書の読者はきちんと考えておいてほしい．ちなみに著者は数理論理学としてのゲーデルの結果を正確に解説しているのであって，決して自分なりの解釈は述べていない．

八 杉　満 利 子（京都産業大学名誉教授）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

菊地 文雄

1983年2月号

30年前の特集“FEMによる流体解析”で私が担当したのは，“有限要素近似と数学的理論”でした．目次を見ると，流体関係の問題を有限要素法（FEM）で解析する手法や結果の話題が網羅されています．今見ても重要なテーマばかりですが，その間の大きな進歩は，3次元問題が本格的に解けるようになり，より複雑で現実的な問題の解析も可能になったことでしょう．

私の担当分を読み返すと，“数学の記号を少しは使わせてもらう”というお断り，3次元要素の話がないこと，最近はあまり見られない流れ関数を利用した手法など，当時の状況を反映した記述が目を引きました．その頃，他の手法に対する有限要素法の特色は，流速と圧力という基本的物理量を直接扱いやすく，一般形状の物体の表現に適した三角形格子などが利用できることだったと思います．その代わり，近似関数や節点（格子点）の選び方に工夫が必要で，その解決のために数学の果たす役割が注目され出していました．また，掲載内容は整理して私の著書[1)]の一部となりました．海外では，流体の有限要素法の数学的理論を扱った専門書が多数刊行されています（例えば文献2)）．



その後，有限要素法以外では非構造格子上の差分法や有限体積法などが発達し，有限要素法でも安定化技法や不連続ガレルキン法，X-FEM（Extended FEM）などが開発されてきましたが，同時にそれらに対する数学的理論も進歩し，今や有限要素法を中心とする数値計算法の数学的解析は，数理科学での一大分野になっています．

3.11大震災でも，津波の伝播・遡上や放射性物質の移流・拡散などのシミュレーションに数値計算法が利用されましたが，予知には十分に活用されず残念です．また，海岸や山地のような複雑形状の解析には有限要素法は適していますが，差分法などのほうが多用されているようです．いずれにせよ，事後の解析でも数値的手法の有効性は十分に確認されており，次に起こりうる大震災の対策などに十分に役立てていただきたく思います．

その後も数値計算に関する話題は本誌で何度も取り上げられましたが，忘れてならないのは，この30年間に数値計算法に密接に関連する学会，例えば日本応用数理学会や日本計算工学会が設立されたことです．これらの学会では，流体の有限要素解析に関する発表も多数なされており，数値的手法を社会の役に立てると同時に，その基本原理を数学的に解明する基盤も30年前よりは随分と拡充したように感じます．

参考文献

1) 菊地文雄『有限要素法の数理』，培風館，1994.
2) V. Girault and P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations, Theory and algorithms*, Springer, 1986.

（きくち・ふみお，一橋大学大学院経済学研究科，東京大学名誉教授）

科学と社会

Science & Society

第10回　国家・学問・戦争の諸相

明治の脚気

科学技術がもたらした危機

岡本　拓司

西洋の科学が明治維新後の日本に導入された頃，学校・軍隊など，国家の施策が多くの人々に及ぶ制度も築かれた．これらの制度の基本的な方針は，科学を含む西洋の知識に基づいて立てられたので，導入間もない科学の影響が，誕生直後の国民の多くに及ぶこともあった．

すでに明治の初めから，科学が恩恵ばかりをもたらすわけではないことを示す出来事も発生していた．脚気はその一例である．本連載では学問としての科学に注目してきたが，今回は，科学が人々の生活に負の影響を直接及ぼした事例を取り上げ，当時の人々がどのように対処したかを論じたい．

脚気の歴史については優れた研究書[1]があり，経緯をまとめた概説[2]も発表されている．事実経過の詳細については，以下の記述でも大きく依存しているこれら既刊の文献に譲り，本稿の論点は，科学と人間の付き合い方に絞ることとする．

10.1 明治期における脚気の流行

現代医学の知見によれば，脚気はビタミンB_1の欠乏症であり，初期にはむくみ，手足の知覚麻痺などの症状として現われ，さらに腱反射の衰えや歩行困難などを惹き起こし，重篤な場合には心臓麻痺（脚気衝心）から死に至る．ビタミンB_1の摂取が十分であればほとんど発生しないが，欠乏すれば深刻化する．ビタミンB_1は豚肉・小豆・麦・玄米などに含まれるが，玄米では糠の部分に含まれており，糠を取り去った白米にはほとんど含まれない．白米が主食であっても，副食物が豊かであればよいが，漬物や味噌を少量副食とする程度で主たる栄養分はほとんど米から摂取している時期に，白米の味のよさから精米の習慣が広まれば，脚気の被害は拡大していく．

日本では古代から脚気は発生していた．白米食がいきわたった元禄年間（1688年–1704年）には江戸の武士や町人の間で流行し，その後も江戸・大坂・京都を中心に大規模な患者の発生があった．文化・文政期（1804年–1830年）には中国地方や九州でも脚気が流行した．ただし，18世紀前半期には小豆・麦などが有効であることが理解され，幕末には，専門医を中心に，麦飯・小豆飯を中心とする食餌療法が知られるようになった．

一方，ヨーロッパ諸国でも，17世紀から東南アジアや南米の脚気が知られており，19世紀後半以降は医学研究の対象ともなった．しかし，西洋にはパンと肉中心の食習慣ゆえに脚気は存在せず，研究の蓄積もなかったために，近代科学に基づく有効な治療法の発見に至るまでには長い時間が必要であった．

健康に関する記録が詳細に残されている江戸幕府の将軍のうち，家定（1824–1858）・家茂（1846–1866）の死因は脚気衝心であったと考えられている．治療には漢方医・洋方医の両者があたったが，家茂の症状から漢方医が脚気と診断したのに対し，洋方医はリュウマチ・胃腸炎・心臓内膜炎と診断した．維新後，明治2年（1869年）には新政府はドイツ医学の採用を決定したが，洋方医は脚気に対しては無力であった．

家茂に嫁した和宮（1846–1877）は，明治10年（1877年）6月より脚気にかかり，洋方医の判断により箱根に出かけその地で死去した．和宮は明治天皇（1852–1912）の叔母である．叔母への診断に不信感を抱いた天皇は，洋方医中心の侍医を好まず，脚気にかかった際，転地療養の勧めに対し，脚気は国民病であるが国民すべてが転地療養できるわけではない，東北巡幸で高燥の地でも鎮台兵が脚気に苦しんでいるのを見たと反論した[3]．明治10年代には，脚気専門の古方医遠田澄庵（1819–1889）や海軍軍医の高木兼寛（1849–1920）が，脚気の原因は米食にあり，小豆や麦を用いた食餌療法によって脚気の治療・予防が可能であると唱えており，天皇も彼らを信頼していた．しかし医学全般の西洋化が進む中で，明治21年（1888年）には宮中の漢方医はすべて罷免された．

幕末期から明治初期にかけて脚気が大発生したのは，精米法が革新され，糠がほぼ完全に除去されるようになったためである．農村では発生が抑えられ，脚気が都市に固有の病気（「江戸煩い」「江戸病み」）であると考えられたのは，農村には玄米や雑穀を食べる習慣が残されていたためであろう．明治30年代以降の記録をみると，第二次大戦中に米の精米が制限されて脚気が減少するまでの間，毎年1万人前後，少ない年（1912年）でも約4,800人，多い年（1923年）には約27,000人が脚気によって死亡している．脚気の死亡率は高くとも数%を超えないので，患者数は膨大なものであったことが分かる．小豆や麦が予防・治療に有効であることは知られていたが，戦前，脚気は肺結核とならぶ二大国民病であり続けた．

10.2 治療・予防の成功例：遠田澄庵・高木兼寛

脚気専門の古方医，遠田は，将軍家定が重篤な脚気にかかった際に奥医師となり，家茂の診察の際には大坂まで出向くほどの信望を集めていた．維新後も和宮を診察し，明治天皇からの信頼もあつかった．家伝の「遠田の脚気ぐすり」は妙薬とされ，牛込に設立された遠田脚気病院（明治11年（1878年））やその出張所も繁盛した．

遠田は脚気は米の毒によって生ずると考え，米食を禁止し，麦や赤小豆を主体とする粥を与えて治療法とした．明治11年に設けられた官立の脚気病院で治療に従事した遠田の主張や成果は，他の医師らのそれとともに脚気病院の報告（明治12年（1879年）–15年（1882年））に掲載され，政府諸機関や医療関係の出版社にも伝わった．また，明治10年に来日し，脚気や寄生虫症の研究を行っていたドイツ人の医師ショイベ（Heinrich Botho Scheube, 1853–1923）は，明治15年から日本の脚気に関する論文を発表し，遠田の主張と治療法を紹介した．ビタミンの発見者であるオランダのエイクマン（Christiaan Eijkman, 1858–1930）が，脚気と鳥白米病の研究（1889年開始）の初期に，脚気の米毒説を唱えていたのは，遠田説の影響によるものであったといわれる[4]．

なお，遠田の主張は，漢方医の中でも主流であったわけではない．他方，西洋医でも，経験的・伝統的な脚気対策として知られていた麦飯を採用し，脚気の治療・予防に成功する者があった．海軍の高木，陸軍軍医の堀内利国（1844–1895），緒方惟準（1843–1909）などである．

海軍では，明治初年より脚気による死者が目立っていた．明治11年から16年までの間，多い年で4割，少ない年でも2割の兵員が脚気にかかり，毎年30名から50名の死者を出していた．食事の変化が乏しくなる遠洋航海中の艦では，戦闘力を失うほどの脚気発生も見た．著名な例は練習艦龍驤における脚気発生であり，明治15年12月19日に品川沖を出て，翌年9月15日に再び品川沖に戻るまでの間に，乗組員376名のうち169名が脚

気となり，うち25名が死亡した．

海軍の高木は，明治8年（1875年）からロンドンのセント・トーマス病院医学校で学び，帰国後は海軍中医監・東京海軍病院長に任命されていたが，明治13年（1880年）末，脚気の発生状況を精査し，食物が原因ではないかと考えるようになった．兵卒には脚気が多いが，下士官では少なく，将校にはない．また，艦船が停泊中で食物の購入に不便がない場合には脚気は発生しないが，長期間の航海では発生する．高木はこれを食料に関わる状況に還元して解釈し，自由に食物が選べる環境では脚気は発生しないと考えた．その上で高木は兵員の飲食物を分析し，食物中にタンパク質が少なく炭水化物が多い場合に脚気が発生するという結論に至り，これを食物中の窒素と炭素の比によって数値的に表現した．すなわち，食物中の窒素と炭素の比（窒炭比）が1対28以上では脚気が多く，1対22程度では少ない．比を1対15とする食事で脚気を防ぐことができるというのである．具体策は兵食洋食化であった．

高木が食物の窒炭比に着目した頃，壬午動乱で出動・待機していた軍艦が多くの脚気患者を出し，艦によっては兵員の半数以上が倒れるという事態が発生した（明治15年7月から8月）．同年末には龍驤の事件も問題となった．これらの機会を利用して，高木は兵食の洋食化を提言し洋食採用の動きを本格化させた．

高木（この頃医務局長）は，明治17年（1884年）2月2日，肉類・野菜類等を豊富に摂取できるよう工夫された食糧表を定め，兵食改革を具体化させた．同年2月から11月の，軍艦筑波の遠洋航海では，改革の効果が試されたが，結果的に，コンデンスミルクを飲めない者や肉を食べない者など16名が脚気にかかったのみであった．以後，主食をパンから麦飯に変えるなどの措置を経て，明治23年（1890年）には海軍糧食条例が公布され，主食はパンと米食（白飯または麦飯）の混用となり，海軍では脚気はほぼ消滅した．

高木の説は，窒炭比に応じて脚気が生ずるというものであったが，具体的にはタンパク質の欠乏と炭水化物の過剰を原因とみなしており，さらに実際に推奨される食餌内容からは，眼目は米をパンや麦飯で置換していく点にあったことが分かる．伝統的な治療法と相容れる点が多く，かつそれを栄養学説として抽象化したものであった．

陸軍でも，現場では麦飯が採用された．大阪陸軍病院長の堀内は，食事が粗悪な監獄で脚気の発生を見ない点に注目し，その理由が「在監人給与規則」（明治14年（1881年）7月1日施行）に定められた麦6割・米4割からなる主食の給与にあると考えた．大阪鎮台は，明治17年12月4日より，堀内の建議に基づいて1年間麦飯を試用したが，その結果脚気は減少した．この成果を受けて，近衛軍医長兼東京陸軍病院長軍医監の緒方惟準は，明治18年（1885年）12月から近衛歩兵隊でも3割の麦飯を採用し，脚気を激減させた．同年中には第五師団（広島），19年には第一師団（東京），20年には第二師団（仙台），21年には第三師団（名古屋），22年には第六師団（熊本）において麦飯の採用が始まり，24年には陸軍においても脚気はほぼ消滅した．ただし，これは陸軍中枢の方針によるものではなく，各師団の判断に依存していたため，米麦の比率は現場によって異なっており，また1年のうちある時期を限って麦飯を給与するにとどめていた例もあった．

10.3 細菌説：東大医学部と陸軍軍医本部・医務局

一方，近代医学の導入の拠点となった東京大学医学部（明治10年設立．以後名称は変転するが東大医学部と略称する）の医学者たちは，明治期を通じて，この病気に対する有効な施策をほとんど講ずることができなかった．

東大医学部の脚気研究に決定的な影響を与えたのは，ショイベおよびベルツ（Erwin von Baelz, 1849–1913）である．ベルツは，明治9年（1876年）から明治35年（1902年）までの在任中，脚気は細菌を病原体とする伝染病であると講じ続け，麦飯の効果も知りながら，食物の影響については，

青魚の中毒の可能性や，腐敗米が脚気菌の発生を容易にする可能性を指摘するにとどまっていた．

ショイベは，明治15年から翌年にかけて，京都療病院における約600例の脚気の観察結果をドイツ語の論文にまとめ，脚気を本格的にヨーロッパに紹介した．論文中では，既述の通り遠田の治療成績や脚気論が紹介され，当時の西洋医学が脚気に対してほとんど効果がない点も指摘されているが，脚気は伝染病であると理解されている．ショイベはドイツ帰国後も著作を発表し続け，この病気が東南アジアのベリベリと同じものであると広く知らせることなどに貢献した．

実際に脚気菌を発見したと報ずる者もいた．東京大学御用掛兼内務省御用掛の緒方正規（後に東大医学部教授．1853–1919）は，明治18年4月，脚気菌の発見を内務卿山縣有朋（1838–1922）に報じ，報告会を開いた．翌年には文部省にも報告を提出した（官報に掲載）．しかし，報告をベルリンで読んだ北里柴三郎（1853–1931）は，明治21年，緒方の誤りをドイツ語の医学誌上で指摘し，以後発見を否定する論文が発表され続けた．緒方の報告は誤りであったが，脚気の細菌説・伝染病説は，東大医学部の重鎮，青山胤通（1859–1917）・三浦謹之助（1864–1950）らによって支持され続けた．この時期，パストゥール（Louis Pasteur, 1822–1895），コッホ（Robert Koch, 1843–1910）によって築かれた細菌学は，1882年の結核菌発見，1884年のコレラ菌（再）発見などの成果を生み出しており，細菌学の黄金期を築きつつあった．

脚気の細菌説には，細菌の生み出す毒が病因であるとする説（ショイベ）があったが，これとは独立に，ベルツの示唆に従って，東大医学部の三浦守治（1857–1916）は青魚の中毒説を唱え（明治21年），次いで米中毒説へと移行した．変質した米や黴米の毒素による中毒が脚気の原因であるとする説は山極勝三郎（1863–1930）などが支持したが，全体としては少数説にとどまった．

高木の栄養障害説に至っては，支持者はほとんどなく，多方面から攻撃を受けた．東大医学部の大澤謙二（1852–1927）は，明治18年，人体中での消化吸収に関する試験を行い，米飯を食べる方が麦飯の場合よりも多くタンパク質（窒素分）が吸収されることを示して高木説に反論した．大澤は，栄養状態が病気一般に対する感受性を左右することは当然であり，海軍の成果もそのような事情によると主張した．高木の脚気予防法は，米を麦に代えた点に眼目があったが，病因論への抽象化にあたっては，窒炭比のみが取り上げられ，米麦の消化吸収の実態が検討されないという不備があった．大澤は見事にこの点を突いた．

東大医学部と並ぶ脚気の細菌説の拠点は，陸軍軍医本部・医務局であり，その中心人物は石黒忠悳（軍医本部次長，軍医総監・医務局長など歴任．1845–1941）と森林太郎（鷗外．1862–1922）であった．石黒は脚気は腐敗した有機物が起こす伝染病であると論じていたが，高木が栄養障害説を発表すると，明治18年には，脚気は，栄養状態の悪い禅僧に稀であり，食事が貧弱な田舎のほうが都会よりも少ないこと等を挙げ，栄養不足を唯一の原因とすることはできないと主張した．

森は，留学中の1885年にドイツ語で兵食論を著し，石黒の説を支えた．森の兵食論の大意は石黒に送られ，翌年，軍医学会において石黒によって代読された．森の兵食論は，ドイツの最新情報を散りばめてはいるが，主張は単純であり，米飯を主とする日本陸軍の兵食は，タンパク質は不足するものの，熱量からみて西洋の兵食と遜色はないというものである．脚気への言及はほとんどなく，「米食ト脚気ノ関係有無ハ余敢テ説カズ」[5]と，米食と脚気の関係は取り上げるに値しないものであることを匂わせる記述があるのみである．

森の目的は，石黒の意を受けて，高木説に最新の栄養学説に基づく反駁を加えることにあった．森は，脚気の米食原因説や，麦飯採用による脚気予防策に不信の念を抱いており，高木説と大澤の反論についても知っていた．東大医学部や石黒らの主張にも関わらず，当時すでに麦飯による脚気予防はよく知られていたらしく，明治19年（1886年），森を訪問した特命全権公使の品川弥二郎（1843–1900）は，「参議など貴官は今皆麦飯を喫す」と述べてそ

の利害を尋ねたが，森は，高木説を排して大澤の説を支持すると述べた[6]．

森は，帰国後も高木説に対して容赦ない攻撃を加えた．明治21年の「非日本食論ハ将ニ其根拠ヲ失ハントス」と題する講演では，以前は問題視した日本兵食のタンパク質不足も，最新学説によれば懸念には及ばないとし，非日本食論には根拠がないと主張した．さらに，高木を「『ロウスビーフ』ニ飽ク事ヲシラザル英吉利流ノ偏屈学者」と批判し，聴衆に対し，「諸君ヨ我々日本人ハ此有難キ第十九世紀ニ生レ乍ラ何故ニ或ル権力家ノ説ヲバ直チニ認メテ『ドグマ』ト倣シ此偽造ノ通則ヨリ空中ノ楼閣タル夥多ノ細則ヲ作ルノ癖アルヤ」と問うた．批判は華麗にして痛烈である[7]．

森は，明治22年（1889年）7月には，米食・麦食（米麦飯）・洋食（パンと肉）の比較を行う試験を実施した．これは熱量・タンパク質摂取・体内活性度を調査するもので，いずれの観点からも結果は米食・麦食・洋食の順に良好であった．脚気については直接的な調査は行われていないが，石黒は森の結果を度々引用し，米飯主体の兵食に問題がないことの根拠とした．

10.4 戦争中の脚気暴発と臨時脚気病調査会

石黒・森の兵食給与方針のために，日清・日露の戦時下，陸軍では脚気が暴発した．既述の通り，陸軍・海軍ともに，1890年代には脚気予防にある程度成功していたが，糧秣の輸送・補給に困難の生ずる戦時下では，陸軍・海軍の兵食方針の違いが，両者の脚気被害の差となって現われた．

海軍でも補給の困難によって脚気は発生したが，陸軍では，中枢部の兵食方針が脚気被害を発生・拡大させた．日清戦争では，戦死977人，戦傷死293人，入院患者284,526人，患者死亡20,159人と，戦死者・戦傷死者に比べて病死者が極めて多かったが，入院患者のうち脚気によるものは34,783人と赤痢（12,205人）やマラリア（11,214人）よりも多く，脚気による死者は3,944人とコレラ（5,709人）に次いで多い（次は赤痢で1,964人）．地域別に脚気発生を見ると，第一軍（韓国）では発生率12.6%，死亡率8.5%，第二軍（清国）では発生率15.6%，死亡率10.7%，台湾征討軍では発生率107.7%，死亡率10%であった．韓国では糧食の輸送状況が悪く，徴発した韓国米に粟・小豆を混ぜて主食としていたために発生率が低い．輸送に余裕のあった台湾で，却って，計算上は全員が1度以上脚気に倒れる事態となったが，これは，白米と僅かな副食からなる兵食のためであった．第二軍では，明治28年（1895年）2月15日，軍医部長の土岐頼徳（1843–1911）が，麦飯かパン，ビスケットの給与を求めて稟議を行ったが，不採用となった．土岐は，翌年1月から5月まで台湾総督府陸軍局軍医部長を務めたが，2月から麦飯の支給を開始して脚気患者を減少させた．

土岐が第二軍で稟議を行った際の第二軍兵站軍医部長は，森である．森は明治28年6月から9月まで台湾に赴任したが，脚気大暴発に対し有効な手段を講じなかった．森の後任の石阪惟寛（1840–1923）は麦飯の支給で対応し，石阪の後任の土岐もこの施策を引き継いだ．しかし，野戦衛生長官であった石黒は，麦飯支給は学問的根拠を欠くとして却って土岐を叱責した．

日露戦争中，脚気はさらに猛威をふるう．正確な数字は得がたいが，控えめに見ても，戦争に関与した陸軍総兵員109万人ほどのうち，17.1%が脚気に罹り，総傷病者の4分の1，銃砲創患者の総数とほぼ同比率を占めた．脚気による死者は，戦地では5,700人を超える．突撃が繰り返された旅順では，外国人は日本兵の足どりが覚束ないのを見て，（絶望的な突撃に向うために）「日本兵は酒に酔っている」と噂したが，歩行を妨げていたのは脚気であった[8]．暴発の原因は，依然白米と貧弱な副食物からなる兵食にあった．

軍・師団などの現場からは，明治37年（1904年）から既に脚気防止のために麦飯の給与を求める声が上がっていたが，当初はほぼ無視された．しかし，石黒が引退し，陸軍大臣の寺内正毅（1852–1919）が麦飯の有効性を信じていたこともあり，現地では徐々に粟・小豆・割麦と米との混食が始

まった．明治 37 年 9 月頃には，陸軍での脚気暴発が海軍との対比で報道され始め，麦飯を給与しない陸軍への批判が高まったが，同年 11 月，陸軍大臣は，医学上の定説はないものの，麦飯給与で防止に努めていると新聞記者に説明した．明治 38 年（1905 年）3 月 10 日には，陸軍大臣より「出征部隊麦飯喫食ノ訓令」が発せられ，実現可能な限りで，精米 4 合と挽割麦 2 合が主食とされた．しかし，明治 40 年（1907 年）の医務局長小池正直（1854–1913）の総括的な報告では，脚気は依然伝染病とされ，麦飯への評価も低いままであった．

陸軍への非難の声は，その後も上がり続けた．これを受け，明治 38 年 2 月 25 日には脚気病調査会の設立案が議会を通過し，明治 41 年（1908 年）5 月 30 日，小池の後任の陸軍医務局長，森を会長とする臨時脚気病調査会が陸軍省内に設立された．同年 7 月 4 日の発会式では，陸軍大臣の寺内が演説を行い，調査会が大学や伝染病研究所ではなく陸軍に設置される理由として，陸軍は長年脚気に苦しめられ，事例の蓄積も多いことを挙げた．次いで，以下のような感想を漏らしている．

尚ほ一言すべきは余が此会の組織を思ひ立ちたる動機なり，即ち余は二十年来の脚気患者なり，二十年前には牛込の遠田氏の診療を受けたる事もありき，其後今日に至る迄二十年間麦飯を摂り居れり，故に日清戦時に於て，余は運輸通信部長の職に在りしを以つて，吾軍隊に麦食を給したりしに，当時石黒男〔爵〕は何故に麦を支給するか，麦飯が果して脚気に効果あるかなど、詰問され遂に麦の供給を中止したる経歴もあり，当時は此席に居らる、森局長の如きも亦石黒説賛成者にして，余を詰問せられし一人なりし，余は脚気に対し自ら苦み，又吾陸軍の苦悩せるを実見し居る事なれば，如何様にもして，一日も早く此病原を闡明したく希望するの極，此会を設置せんとせしなり〔…〕[9]．

麦飯で脚気に対処してきた寺内は，麦飯給与を拒む専門家に不信の念を抱いていたが，陸軍大臣としてついに疑念を晴らす機会を得たのである．

10.5 脚気研究の展開

エイクマンは，1889 年，バタビアにおける脚気研究の中で，白米のみを与えたニワトリに脚気に似た症状が現われるが，米糠の中にはそれを治す物質があることを発見し，オランダ語で発表した．1897 年にドイツ語でも発表されると，これに接した東大の青山や緒方正規は追試を試みたが，ニワトリの麻痺は脚気と同一視できないと論じた．

臨時脚気病調査会の任務の一つは，エイクマンの結果の発展であった．しかし，脚気細菌説が主流を占める調査会では，米糠研究は比較的冷淡な扱いを受けた．陸軍二等軍医正の都築甚之助（1869–1933）は，エイクマンの追試を行ってその正しさを認め，米糠が脚気に有効であると主張した（明治 43 年（1910 年））が，調査会は受け入れず，都築は委員を辞任した．明治 43 年以降，調査会でも白米食と脚気の関係について大規模な調査を行ったが，副食への顧慮を欠き，主食の種別（熟米，米麦，白米）と脚気の発生頻度については，明確な結果が得られなかった．東大とは独立した医学研究の拠点，伝染病研究所の委員も，所長の北里が伝染病説に好意的であったためか，エイクマンの結果の追試に成功しても，脚気の病原については明言を避けた．明治 41 年に来日したコッホが伝染病説を支持した影響も強かった．

他方，エイクマンの結果を受け，米糠抽出物を薬品化する者もいた．都築は，調査会委員辞任後，私立脚気研究所を設立し，糠から抽出した脚気有効成分（アンチベリベリン）を主体とする薬剤を製造・販売した．東京顕微鏡院長・東京衛生試験所長の遠山椿吉（1857–1928）も，脚気を部分的栄養障害と認め（明治 44 年（1911 年）），糠抽出物を銀皮酸，ついでウリヒンと命名し，治療薬として製造・販売した．脚気の栄養欠乏説を支持する少数の医師は，麦飯による予防・治療から，米糠製剤による治療へと関心を移していった．

米糠研究で大成功を収めたのは，調査会とは直接関わりのない，東京帝大農科大学であった．農科大学では，脚気白米中毒説が農業関係者の不安

を招いたことを問題視し，明治37年以来，古在由直（1864–1934）らが脚気研究を行っていた．明治39年（1906年）には，ヨーロッパから帰国した鈴木梅太郎（1874–1943）が参加した．鈴木は，糠のアルコールエキスから脚気有効成分を分離してアベリ酸と名づけ，次いでこのアベリ酸（のちにオリザニンと改名）をピクリン酸塩として結晶化することに成功した（明治45年（1912年））．明治44年には，鈴木はオリザニンの製法の特許を得ており，また三共合資会社がオリザニンの販売を始めた．

医師ではない鈴木は，オリザニンの効果を確認するためには医師の協力を必要としたが，医師の反応は冷たく，発売した三共でも厄介もの扱いであったという．鈴木の回顧によると，若い医師がオリザニンの著効を確認しても，上司が許さないのでさらなる試験はできないことがあった．また，青山と推定される「医界の大立者」は，オリザニンについて，「糠で脚気が癒るなら，小便を飲んでも癒る」（ドイツの民間医療（ホメオパティー）の飲尿療法の連想か）と新聞記者に話し，後には鈴木に面と向かって，「君が脚気の原因を見付けたといふことを人から聞いたが，それは嘘だらうと云つてやつた」と語ったという[10]．

一方，脚気に苦しむ人々は，オリザニンの効果を実感していた．脚気で歩けない学生を道で見かけた鈴木が，オリザニンを2瓶与えると数日のうちに回復したが，礼に来た学生は1瓶で治ったのでもう1瓶は大切に保存しておくと語ったという．また，親戚の青年が，脚気のため帰郷の途中，衝心で入院し危篤状態となったが，鈴木が院長に頼んでオリザニンを与えたところ，やはり数日で回復した．ただし院長は鈴木の薬が効いたとは患者に伝えなかった[11]．鈴木の研究生が脚気衝心に苦しむ理髪店の主人にオリザニンを与えたところ，40分ほどで目に見えて回復したこともあったという[12]．鈴木本人や周辺の回顧談であるためそのまま信用はできないが，患者の反応と医師の態度が対照的である．

医学界主流は，しかし，栄養欠乏説を否定し続けた．森は，明治44年に発表した「妄想」の中で，寺内の叱責など意に介さぬかのように，兵食改良論は「米を食ふことを廃めて，沢山牛肉を食はせたい」という議論であったと回顧し，自分は「米も魚もひどく消化の好いものだから，日本人の食物は昔の儘が好からう」と主張したと書いた[13]．大正3年の第四回日本医学会総会では，東大教授の林春雄（1874–1952）が「脚気の研究に就て」と題する特別講演を行い，動物の白米病と人間の脚気は別種の病気であり，糠エキスは脚気には無効であると主張した．同じ頃，東大では例外的に，病理学の山極が白米中毒説を支持し，糠の効果も認めていたが，同じ教室の長与又郎（1878–1941）と緒方知三郎（1883–1973）は伝染病説に沿った研究を進めていた．彼らは，遂に脚気菌発見という世界的偉業を達成したと誤解し，山極の怒りを買うのを恐れて1月ほど部屋を閉め切って作業を継続したこともあった[14]．

医学界において脚気の微量栄養欠乏説が定着するのは，第一次大戦中に欧米で進展したビタミン研究の成果が戦後に日本に持ち込まれ，一定の支持を得ていった1920年代後半以降のことである．しかし，微量栄養欠乏説の受容は，それ以前の医学者たちの誤りを表面化させない形で行われた．大正15年（1926年）には，脚気のビタミン欠乏説を支持する島薗順次郎（1877–1937）と，これを否定する緒方知三郎の両者に，「ヴィタミンB欠乏症の研究」（B_1 と B_2 の別が知られたのは1927年．B_1 の欠乏が脚気の原因であることは1933年に確認された）を理由として帝国学士院の東宮御成婚記念賞が与えられた．その審査要旨は，脚気ビタミン欠乏症説を否定する表現を含む一見不可解なものであった[15]．

脚気が実際に減少し始めるのはもっと遅く，「栄養改善法」（昭和27年（1952年））により食糧のビタミン強化が図られてからのことであった．麦や米糠製剤の効果が知られていたにも関わらず，根本的な解決が遅れたのは，ビタミン学説の定着後も，医学界主流が細菌説という誤謬に対して明確な態度をとらなかったためではなかったか．

10.6 人々が身を守る方法

以上の経緯からは，科学者にあるまじき態度をとったとして，頑迷な森や青山を非難の対象とするのが適当であるように，一応は思われる．しかし，優秀な科学者は，通常，目新しい事実に出会っても，それをすぐに新発見とは解さず，正統的な学説の範囲内で解釈しようとする．眼前の情報で新理論を構築するのは無謀な初学者である．森や青山の批判の厳しさは，学問の規範から外れる言動を許さない姿勢の反映でもある．

主流の学説を十分理解した上で，新情報から新説を築き，旧説を覆す科学者もいる．科学の歴史ではこうした英雄が好んで取り上げられる．しかし，高木や鈴木のような科学者は少なく，勇敢な彼らが最後に勝利を得るとしても，それまでは多くの人々が旧説に従う．そして，脚気の歴史は，科学者が旧説に従ったまま新たな状況に対処すると，災厄が生ずる場合があることを示している．

脚気もビタミン学説が解決したように，どのような危険もいずれは科学が無害化するのかもしれない．しかし，限りある寿命しか与えられていない人間には，そうした解決を悠長に待つことはできない．では人々は，科学の特性がもたらすこうした災厄にどう対処したか．

大多数の人々は科学のもたらす災厄に対して無力である．しかし，明治天皇や寺内，或いはオリザニンで脚気を治そうとした町の人々などは自衛に成功した．彼らは，主流派の医師の主張に，反駁よりも無視によって応じ，当時の医学からみれば正統的ではない方法を採用した．さらに，明治天皇や寺内は，自身の地位や職務に由来する権力を用いて，主流派医師に抗した．科学的な論争が外部の権力の影響を受けるのは好ましくないかもしれないが，現実にはありうる事態である．専門家がどのような議論を展開しようと，特に生命や健康の危険については，非専門家は利用できるあらゆる資源や力を用いてこれを避けようとする．彼らには科学の枠内で問題を解決する義務はない．その姿勢は非科学的かもしれないが，非専門家がそうした評価を苦にするであろうか．

科学は危険を招くことがある．科学者はこれを科学内の論争で解決しようとする．しかし，論争の中で解決がつかない場合，あるいはつきそうな場合でも，危険に曝される遥かに多くの人々は，その論争の外にある力や資源で危険から逃れようとすることがある．脚気の歴史は，少数の専門化集団の決定がその他の多くの人々に大きな影響を及ぼすような社会では，このような構図で危機の回避が試みられる場合があることを示唆している．

次回も，社会と科学技術の間で起きた摩擦のごく初期の例として，盗電をめぐる法律の問題を取り上げる．

参考文献

1) 山下政三，『脚気の歴史――ビタミン発見以前――』，東京大学出版会，1983 年；山下政三，『明治期における脚気の歴史』，東京大学出版会，1988 年；山下政三，『脚気の歴史　ビタミンの発見』，思文閣出版，1995 年；山下政三，『鷗外 森林太郎と脚気紛争』，日本評論社 2008 年．
2) 板倉聖宣，『模倣の時代』上・下，仮説社，1988 年；秦郁彦，『病気の日本近代史　幕末から平成まで』，文藝春秋，2011 年，38–72 ページ．
3) 宮内庁編，『明治天皇紀　第四』，吉川弘文館，1970 年，399–400 ページ．
4) 山下，前掲[1]，『脚気の歴史　ビタミンの発見』，156 ページ．
5) 森林太郎『鷗外全集』，第二十八巻，岩波書店 974 年，11 ページ．
6) 森林太郎『鷗外全集』，第三十五巻，岩波書店 975 年，144 ページ．
7) 森，前掲[5]，『鷗外全集』，第二十八巻 6–87 ページ．
8) 山根正次「脚気ノ研究ニ就テ」，『神経学雑誌』**6** 巻 **5** 号（1907 年 8 月 5 日），252–254 ページ．
9) 「脚気病調査会」，『医海時報』**734** 号（1908 年 7 月 11 日），958 ページ．
10) 鈴木梅太郎，『研究の回顧』，輝文堂書房，1943 年，10–11 ページ．
11) 鈴木，前掲[10]，11–12 ページ．
12) 鈴木梅太郎博士顕彰会・鈴木梅太郎先生伝刊行会編集・発行，『鈴木梅太郎先生伝』，朝倉書店発売，1967 年，148–151 ページ．
13) 森林太郎，『鷗外全集』，第八巻，岩波書店，1972 年，208 ページ．
14) 緒方知三郎，『一筋の道』，東京出版，1947 年，61 ページ．
15) 日本学士院編集・発行『日本学士院八十年史　資料編四』，1963 年，226–230 ページ．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

微積分2

累次積分の順序変更

海老原　円・太田　雅人

4.1 主題の提示

今回の主題は広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ である．この広義積分をめぐって，関連する微積分の問題を考えていこう．

問題 4.1 （東京大学大学院理学系研究科化学専攻，平成 21 年度） 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx, \quad \alpha > 0$ 　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

解答例 (1) 後で必要となるため，少し一般化しておこう．$\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ とする．オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より，$R > 0$ に対して

$$\int_0^R e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx + i\int_0^R e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \int_0^R e^{-\alpha x}e^{i\beta x}\,dx$$
$$= \int_0^R e^{-(\alpha - i\beta)x}\,dx = -\left[\frac{\alpha + i\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{-(\alpha-i\beta)x}\right]_0^R$$
$$= -\left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\{(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + i(\beta\cos\beta x + \alpha\sin\beta x)\}\right]_0^R$$

が成り立つ．最初と最後の式の実部と虚部を比較することにより

$$\int_0^R e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{e^{-\alpha R}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta R - \beta\sin\beta R)$$
$$\int_0^R e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{e^{-\alpha R}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\cos\beta R + \alpha\sin\beta R) \tag{4.1}$$

を得る．ここで，$R \to \infty$ とすれば

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \tag{4.2}$$

となる．解答は第 2 式で $\beta = 1$ とすればよい．　**小問 (1) の解答終わり**

この解答例では，オイラーの公式を利用したが，別解として，部分積分を 2 回行ってもよい．

4.2 累次積分の順序交換

問題 4.1 において，小問 (1) は小問 (2) のヒントであると考えるのが自然であろう．この線に沿って，小問 (2) を考えよう．基本的なアイデアを説明するために，まず形式的な計算を行う．$\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$ を α について 0 から ∞ まで積分すると

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right)d\alpha = \int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2}\,d\alpha = [\arctan\alpha]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

となる．ここで，**累次積分の順序交換**を行うと

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right)d\alpha &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,d\alpha\right)\sin x\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\end{aligned} \tag{4.3}$$

となり，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ が得られる．　**形式的な計算終わり**

このような形式的な計算は魅力的ではあるが，累次積分の順序交換 (4.3) はこのままでは受け入れられない．すなわち，正当化する必要がある．以上のことを踏まえたうえで，以下の解答例を読んでいただきたい．

問題 4.1 小問 (2) の解答例　まず，$R > 0$ に対して

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-Ry}}{1+y^2}(\cos R + y\sin R)\,dy \tag{4.4}$$

が成り立つことを示そう．

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^R \left(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dy\right)dx \tag{4.5}$$

において累次積分の順序交換を行いたいが，(4.5) の右辺の広義積分に対しては直接行うことはできない．そこで，$L > 0$ に対して

$$\int_0^R \left(\int_0^L e^{-xy}\sin x\,dy\right)dx$$

を考える．このとき，$e^{-xy}\sin x$ は有界閉区間の直積集合 $[0,R]\times[0,L]$ 上で連続だから，問題なく累次積分の順序交換ができ

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^R \left(\int_0^L e^{-xy}\sin x\,dy\right)dx + \int_0^R \frac{\sin x}{x}e^{-Lx}\,dx$$
$$= \int_0^L \left(\int_0^R e^{-xy}\sin x\,dx\right)dy + \int_0^R \frac{\sin x}{x}e^{-Lx}\,dx \qquad (4.6)$$

が成り立つ．ここで，$|\sin x| \leq |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ だから，第 2 項の積分は

$$\left|\int_0^R \frac{\sin x}{x}e^{-Lx}\,dx\right| \leq \int_0^R \left|\frac{\sin x}{x}\right| e^{-Lx}\,dx \leq \int_0^R e^{-Lx}\,dx \leq \frac{1}{L}$$

と評価される．よって，(4.6) において $L \to \infty$ とすれば

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^R e^{-xy}\sin x\,dx\right)dy \qquad (4.7)$$

が得られる．ここで，(4.1) より，(4.7) の右辺は

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy - \int_0^\infty \frac{e^{-Ry}}{1+y^2}(\cos R + y\sin R)\,dy$$

に等しいので，目標の式 (4.4) が得られた．

次に，(4.4) において $R \to \infty$ とした極限を計算しよう．$\cos R + y\sin R$ をベクトル $(1, y)$ と $(\cos R, \sin R)$ の内積と考え，**シュワルツの不等式**を用いると，$|\cos R + y\sin R| \leq \sqrt{1+y^2}$ である．これから，(4.4) の右辺第 2 項は

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-Ry}}{1+y^2}(\cos R + y\sin R)\,dy\right| \leq \int_0^\infty \frac{e^{-Ry}}{1+y^2}|\cos R + y\sin R|\,dy$$
$$\leq \int_0^\infty \frac{e^{-Ry}}{\sqrt{1+y^2}}\,dy \leq \int_0^\infty e^{-Ry}\,dy = \frac{1}{R}$$

と評価される．よって，(4.4) において $R \to \infty$ とすれば，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ が得られる．

解答終わり

4.3 フビニの定理

前節では，累次積分の順序交換が本質的に重要な役割を果たしている．ここで，累次積分の順序交換に関する一般的な定理である**フビニの定理**を紹介する．

定理 4.1（フビニの定理） I, J は区間，$f(x, y)$ は $I \times J$ で連続とする．このとき

$$\iint_{I\times J} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_J \left(\int_I |f(x,y)|\,dx\right)dy = \int_I \left(\int_J |f(x,y)|\,dy\right)dx$$

が（∞ となる場合も含めて）成り立つ．さらに，この積分が有限であれば

$$\iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx\right)dy = \int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy\right)dx$$

が成り立つ． □

ここで，I, J は有限区間でも無限区間でもよい．関数 $f(x,y)$ が非負値の場合は無条件で累次積分の順序交換ができるが，符号が変化する場合は絶対値をとった関数 $|f(x,y)|$ の積分が有限であることを確かめる必要がある．

定理 4.1 は**ルベーグ積分論**を使って証明される．I と J がともに有界閉区間であれば，リーマン積分でも無条件で順序交換ができるが，それ以外の場合は，**広義リーマン積分**の範囲で累次積分の順序交換を保証するためには余計な仮定が必要になる（例えば，杉浦[1) p.82, 定理 1.12 や宮島[2)] p.234, 定理 7.20 を参照のこと）．なお，小問 (2) の解答例において「(4.5) の右辺の累次積分に対しては順序交換を直接行うことはできない」と書いたが，これは「広義リーマン積分の範囲では」という条件での話である．上記のフビニの定理を用いれば，(4.5) の右辺の累次積分の順序交換ができることは簡単に分かる．実際，$|\sin x| \leq |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ より

$$\int_0^R \left(\int_0^\infty |e^{-xy} \sin x| \, dy \right) dx \leq \int_0^R \left(\int_0^\infty x e^{-xy} \, dy \right) dx = \int_0^R 1 \, dx = R$$

だから，フビニの定理より

$$\int_0^R \left(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dy \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^R e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy$$

が成り立つことが分かり，小問 (2) の解答例の式 (4.5) から (4.7) までの議論は不要になる．このように，累次積分の順序交換に関しては，広義リーマン積分よりもルベーグ積分のほうが便利である．ちなみに，このフビニの定理をもってしても，(4.3) には直接適用することはできないことに注意しよう．実際

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x} |\sin x| \, d\alpha \right) dx = \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} \, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, dx$$

$$\geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| \, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty \tag{4.8}$$

となるからである．そのため，小問 (2) の解答例のように，まず，$R > 0$ に対して (4.4) を示し，その後，$R \to \infty$ とした極限を計算する必要がある．

今回の主題の広義積分とフビニの定理に関連した問題を考えよう．

問題 4.2　（早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻，平成 23 年度）

(1)　$k > 0$ に対し，広義積分 $I(k) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-kx} \, dx$ は収束することを示せ．

(2)　等式 $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xy} \, dy$ $(x > 0)$ を用いて $I(k)$ を 2 重積分で表し，

$$I(k) = \int_0^\infty \frac{1}{1 + (k+y)^2} \, dy$$

が成り立つことを示せ．

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{k \to +0} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-kx} \, dx$ を求めよ．

解答例　(1) まず，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ だから，被積分関数は $x = 0$ においても連続であ

ることに注意する．また，$|\sin x| \leq |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ だから，$k > 0$ のとき

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} e^{-kx} \right| dx \leq \int_0^\infty e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k}.$$

よって，広義積分 $I(k)$ は絶対収束し，ゆえに収束する．

(2) まず，$|\sin x| \leq |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ より

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-xy} e^{-kx} \sin x|\, dx\, dy \leq \int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-xy} e^{-kx}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x e^{-xy}\, dy \right) e^{-kx}\, dx = \int_0^\infty e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k}$$

である．よって，フビニの定理より，累次積分の順序交換ができ

$$I(k) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy}\, dy \right) e^{-kx} \sin x\, dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(k+y)x} \sin x\, dx \right) dy$$

となる．さらに，(4.2) より，$I(k) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+(k+y)^2}\, dy$ を得る．

(3) 前問 (2) より

$$I(k) = \int_0^\infty \frac{1}{1+(k+y)^2}\, dy = \int_k^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan k$$

だから，$\displaystyle\lim_{k\to+0} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-kx}\, dx = \lim_{k\to+0} I(k) = \frac{\pi}{2}$ を得る．　**解答終わり**

もう少し前にしておいたほうがよかったが，ここで，**広義積分**に関する基本事項を確認しよう．区間 $[a, \infty)$ で連続な関数 $f(x)$ の広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ は

$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\, dx \tag{4.9}$$

により定義される．右辺の極限が存在するとき，この**広義積分は収束する**という．

特に，$f(x)$ が非負値関数のとき，$\displaystyle\int_a^R f(x)\, dx$ は R に関して非減少だから，(4.9) の右辺の極限は ∞ に発散するか，そうでなければ，有限な値に収束する．そこで，**非負値関数 $f(x)$ に対しては**，前者の場合は $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx = \infty$ とかき，後者の場合は $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx < \infty$ とかく．

広義積分が収束することを確かめるためには，次の定理が便利である．問題 4.2 (1) の解答でもこの定理を用いた．

定理 4.2　$f(x)$ は区間 $[a, \infty)$ で連続とする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ は絶対収束すれば収束する．　□

ここで，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ が**絶対収束**するとは，$\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty$ が成り立つことである．この定理において，逆は成り立たない．すなわち，収束するが，絶対収束しない広義積分が存在する．今回の主題の広義積分はその代表的な例である．広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ が絶対収束しないことは，すでに (4.8) で示した．この広義積分が収束することを問題 4.1 (2) の解答例とは別に示しておこう．

まず，$x \sim 0$ のとき，$\sin x = x + O(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ だから

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

である．よって，関数 $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1-\cos x}{x^2}$ は $x=0$ でも連続である．$R>0$ に対し，部分積分により

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1-\cos R}{R} + \int_0^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

となる．ここで，$R \to \infty$ とすると，右辺の第 1 項は 0 に収束する．また，$0 \le 1-\cos x \le \frac{x^2}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ より

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx < \infty \tag{4.10}$$

だから，極限

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \tag{4.11}$$

が存在することが示された．

さて，問題 4.2 (3) において

$$\lim_{k\to+0} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-kx}\,dx = \int_0^\infty \lim_{k\to+0} \frac{\sin x}{x} e^{-kx}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{4.12}$$

と**極限と積分の順序交換**ができれば，今回の主題 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ が得られる．結果的に，(4.12) は正しいのであるが，右辺の広義積分は絶対収束しないため，証明は慎重な議論を要する（例えば，参考文献 3) p.328, 例 7.7.7 を参照のこと）．ここでは，その議論は紹介しない．その代わりに，極限と積分の順序交換に関する簡単な定理を述べておこう．

定理 4.3　I, J は区間とし，$f(x,t)$ は $I \times J$ 上で定義された連続関数とする．さらに，すべての $(x,t) \in I \times J$ に対して $|f(x,t)| \le g(x)$ をみたし，かつ $\int_I g(x)\,dx < \infty$ をみたす I 上の関数 $g(x)$ が存在すると仮定する．このとき，関数

$$F(t) = \int_I f(x,t)\,dx$$

は区間 J において連続である．□

例えば，定理 4.3 から

$$\lim_{\alpha\to+0} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \tag{4.13}$$

が分かる．実際，$g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ とおくと，すべての $(x,\alpha) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ に対して，$0 \le e^{-\alpha x} g(x) \le g(x)$ であり，また，(4.10) より $\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$ である．よって，定理 4.3 より，$\int_0^\infty e^{-\alpha x} g(x)\,dx$ は $\alpha \in [0,\infty)$ に関して連続である．特に，$\alpha \to +0$ とすれば，(4.13) が成り立つ．

次の節では，(4.11) と (4.13) を用いて，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ を示す．

4.4 微分と積分の順序交換

問題 4.2 では，極限 $\displaystyle\lim_{k\to+0}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-kx}\,dx = \frac{\pi}{2}$ を**累次積分の順序交換**（フビニの定理）を用いて示したが，この節では，連載第 2 回のテーマであった**微分と積分の順序交換**（定理 2.1）を用いて，同じ極限を求める問題を考えよう．

> **問題** 4.3 （大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻，平成 22 年度：一部改題） $\alpha > 0,\ t\in\mathbb{R}$ に対して
> $$I(\alpha,t) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin(tx)}{x}\,dx$$
> とする．
> (1) $I(\alpha,t)$ は t について微分可能な関数であることを証明せよ．
> (2) $\dfrac{\partial I}{\partial t}(\alpha,t)$ および $I(\alpha,t)$ を求めよ．
> (3) $\displaystyle\lim_{\alpha\to+0} I(\alpha,1)$ を求めよ．

解答例 (1) $T>0$ を任意にとり，$K_T := [0,\infty)\times[-T,T]$ とおく．また，パラメータ $\alpha>0$ を固定して

$$f(x,t) = e^{-\alpha x}\frac{\sin(tx)}{x},\quad (x,t)\in K_T$$

とおく．このとき，$f(x,t)$ は K_T で連続かつ t に関して微分可能で $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = e^{-\alpha x}\cos(tx)$ も K_T で連続である．また，すべての $(x,t)\in K_T$ に対して

$$|f(x,t)| \le |t|e^{-\alpha x} \le Te^{-\alpha x},\quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le e^{-\alpha x}$$

であり，かつ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx < \infty$ だから，$I(\alpha,t)$ は $t\in[-T,T]$ について微分可能で

$$\frac{\partial I}{\partial t}(\alpha,t) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(tx)\,dx \tag{4.14}$$

が成り立つ（定理 2.1 参照）．ここで，T はいくらでも大きくとれるから，$I(\alpha,t)$ は $t\in\mathbb{R}$ について微分可能で，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して (4.14) が成り立つ．

(2) 前問 (1) と (4.2) より

$$\frac{\partial I}{\partial t}(\alpha,t) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(tx)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}.$$

また，$I(\alpha,0)=0$ だから，微積分学の基本定理より

$$I(\alpha,t) = I(\alpha,0) + \int_0^t \frac{\partial I}{\partial \tau}(\alpha,\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{\alpha}{\alpha^2+\tau^2}\,d\tau = \arctan\frac{t}{\alpha}.$$

(3) 前問 (2) より，$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0} I(\alpha,1) = \lim_{\alpha\to+0}\arctan\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}.$ **解答終わり**

最後に，問題 4.3 と同じ方針で，今回の主題 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ を導くことができ

ることを例題形式で示そう．

例題 4.1　$\alpha > 0, t \in \mathbb{R}$ に対して，$G(\alpha, t)$ を次で定める．

$$G(\alpha, t) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos(tx)}{x^2}\, dx$$

(1)　$G(\alpha, t)$ は t について微分可能な関数であることを証明せよ．

(2)　$G(\alpha, t)$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{\alpha \to +0} G(\alpha, 1)$ を求めよ．

(3)　(2) の結果を用いて，次を示せ．

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

解答例　(1) 詳細は省略するが，問題 4.3 (1) と同様の議論により，$G(\alpha, t)$ は t について微分可能であり，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\alpha, t) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx$$

が成り立つことが分かる．

(2) 前問 (1) と問題 4.3 (2) より $\dfrac{\partial G}{\partial t}(\alpha, t) = I(\alpha, t) = \arctan \dfrac{t}{\alpha}$ が成り立つ．また，$G(\alpha, 0) = 0$ だから，微積分学の基本定理と部分積分により

$$G(\alpha, t) = G(\alpha, 0) + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \tau}(\alpha, \tau)\, d\tau = \int_0^t \arctan \frac{\tau}{\alpha}\, d\tau$$

$$= \left[\tau \arctan \frac{\tau}{\alpha}\right]_0^t - \int_0^t \frac{\alpha \tau}{\alpha^2 + \tau^2}\, d\tau = t \arctan \frac{t}{\alpha} - \left[\frac{\alpha}{2} \log(\tau^2 + \alpha^2)\right]_0^t$$

$$= t \arctan \frac{t}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \log(t^2 + \alpha^2) + \alpha \log \alpha$$

となる．これから

$$\lim_{\alpha \to +0} G(\alpha, 1) = \lim_{\alpha \to +0} \left\{\arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \log(1 + \alpha^2) + \alpha \log \alpha\right\} = \frac{\pi}{2}.$$

(3) (4.11), (4.13) と前問 (2) から

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \lim_{\alpha \to +0} G(\alpha, 1) = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．

解答終わり

今回の原稿を書くにあたり，文献 4) を参考にさせていただいたことを記しておく．次回のテーマは「線形代数 3」である．

参考文献

1)　杉浦光夫『解析入門 II』東京大学出版会，1985 年．
2)　宮島静雄『微分積分学 II—多変数の微分積分—』共立出版，2003 年．
3)　鈴木武・山田義雄・柴田良弘・田中和永『理工系のための微分積分学 II』内田老鶴圃，2007 年．
4)　小澤徹『非有界区間に於ける広義リーマン積分の条件収束』http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/hiyukaikukan.pdf

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

機械学習の情報幾何 (1)

サポートベクトル機械

甘 利 俊 一

機械学習は人工知能の研究に始まり，いまや独立した大きな研究分野になっている．ここにも幾何学的な仕組みがいろいろと現れる．そこで 4 回にわたって，幾何学から眺めた機械学習の裏街道をめぐってみたい．機械学習については多くの成書[1~4]があるので表街道はそれらを参照していただきたい．初回はサポートベクトル機械から始めよう．なお，自然勾配学習法について，ここで付記する．

線形識別や線形回帰は，パターン認識や関数回帰の最も簡単な手法であるが，その限界も明らかである．ちょっとした工夫で，これを非線形に拡張できる．いま，n 次元のベクトルであるパターン信号 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ を考えよう．これは n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の要素である．これを非線形に変換してもっと次元の高い N 次元の空間 $\boldsymbol{R}^N$ に埋め込んでみよう[5,6]．式で書けば，N 次元の点を $\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_N)$ で表し，N 個の関数 $\varphi_i(\boldsymbol{x}), i = 1, \cdots, N$ を用いて，

$$z_i = \varphi_i(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \tag{20.1}$$

とする．$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ であり，これにより $\boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^N$ に写像する．$\boldsymbol{\varphi}$ は連続で単射とすれば，これは，$\boldsymbol{R}^n$ を高次元の空間 $\boldsymbol{R}^N$ に埋め込むことである．$\boldsymbol{\varphi}$ が非線形であれば，$\boldsymbol{R}^n$ の像は $\boldsymbol{R}^N$ の中で曲がった n 次元曲面をなす (図 20.1)．

空間の次元を上げればそれだけ自由度が増える．しかも $\boldsymbol{R}^N$ で線形の手法も，$\boldsymbol{R}^n$ で見れば非線形であるから，世界が大きく広がる．カーネル関数という手法を用いれば[4,7,8]，N が無限大の場合にも計算が可能になる．これがサポートベクトル機械である．

20.1 線形識別機械

まず，パターン $\boldsymbol{x}$ を線形関数で分類する機械，線形識別機械から始めよう．

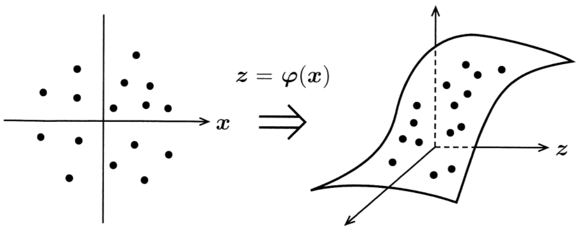


図 20.1　信号空間の高次元への埋め込み.

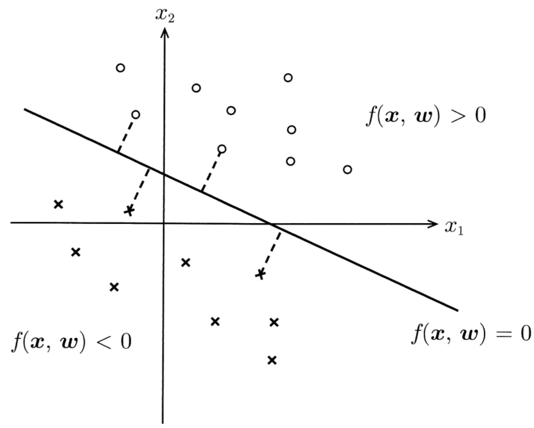


図 20.2　線形識別関数とサポートベクトル (○と×).

これは単純パーセプトロンと呼ばれるもので,

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} + b \tag{20.2}$$

という線形関数を用いる. $\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_n)$ は係数となるベクトルで, 重みベクトルという. パターンは 2 つのクラス C_+ と C_- のどちらかに属するとし, 与えられた $\boldsymbol{x}$ に対して, $y = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ が正ならば C_+ に, 負ならば C_- に分類する.

このような分類器を作るために, 訓練用のデータとして, C_+ のパターンと C_- のパターン

$$C_+ = \left\{\boldsymbol{x}_1^+, \cdots, \boldsymbol{x}_{k_1}^+\right\}, \quad C_- = \left\{\boldsymbol{x}_1^-, \cdots, \boldsymbol{x}_{k_2}^-\right\} \tag{20.3}$$

の $k_1 + k_2$ 個の例を用いる. C_+ のパターンに対しては正解として $y = 1$ が対応し, C_- に対しては $y = -1$ が対応する. パターンは $\boldsymbol{R}^n$ の点であるが, (20.2) の線形関数 f はその値の正負によって $\boldsymbol{R}^n$ を正の領域と負の領域に 2 分割する (図 20.2). C_+ と C_- のパターンが線形分離可能とは, この 2 つを分離する超平面 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ が存在し,

$$f\left(\boldsymbol{x}_i^+, \boldsymbol{w}\right) > 0, \quad f\left(\boldsymbol{x}_j^-, \boldsymbol{w}\right) < 0 \tag{20.4}$$

が成立することである. このような $\boldsymbol{w}$ と b の組を訓練データをもとに探せばよい. これには, パーセプトロンの学習法がよく知られている.

線形分離可能なときに, 分離超平面は一つでなくたくさん存在してよい. その中では, なるべく余裕をもった超平面, つまり少しずらしてもなおかつ分離が成り立つものを選びたい. そのために, マージン (余裕) という概念を導入する.

まず, 線形関数 f の正負だけが問題だから, $(\boldsymbol{w}, b)$ に正の定数 c を掛けた $(c\boldsymbol{w}, cb)$ は同じ性能の識別式である. だから, 正負のパターンすべての $\boldsymbol{x}_i$ に対して

$$|\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + b| \geq 1, \quad \min_i |\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i + b| = 1 \tag{20.5}$$

という条件を付けて, 不定性を解消する. さらに, 正しい識別を与える $(\boldsymbol{w}, b)$

でも b をずらしていくと識別超平面は平行に移動し，ついに超平面に引っかかる点が現れる．これは $|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}_i+b|$ が最小である $\boldsymbol{x}_i$ である．点 $\boldsymbol{x}$ から超平面への距離は

$$d=\frac{|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}+b|}{|\boldsymbol{w}|} \tag{20.6}$$

であるから，(20.5) 式より，識別超平面までの距離が最も小さい $\boldsymbol{x}_i$（(20.5) 式で等号が成立する点）をとると（これは一つとは限らない），この点からの距離は $1/|\boldsymbol{w}|$ となる．これを識別機械 $(\boldsymbol{w},b)$ のマージンという．また，このようなパターン $\boldsymbol{x}_i$ のことをサポートベクトルと呼ぶ．これより遠くにある点は実はあってもなくてもよいので，識別超平面はサポートベクトルだけで決まってしまう．しかも，図 20.2 からもわかるようにこれはごく少数個のパターンである．つまり，識別超平面の決定に必要なパターンは，実は少数個である．

以上を式にしよう．問題は

$$\text{制約条件}\quad y_i\left(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}_i+b\right)\geq 1 \tag{20.7}$$

の下で，マージンを最大にするもの，すなわち

$$\text{目的関数}\quad |\boldsymbol{w}|^2 \tag{20.8}$$

を最小にする $(\boldsymbol{w},b)$ を求めることになる．

ここで，制約条件に対応した Lagrange 未定係数 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_i)$ を用いると，問題はラグランジュアン

$$L(\boldsymbol{w},b,\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}|\boldsymbol{w}|^2-\sum\alpha_i y_i\left(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}_i+b\right) \tag{20.9}$$

の最小化に帰する．ここから，L を b と $\boldsymbol{w}$ で偏微分してそれらを 0 と置けば，最適化の条件

$$\sum_i\alpha_i y_i=0,\quad \boldsymbol{w}=\sum_i\alpha_i y_i\boldsymbol{x}_i \tag{20.10}$$

が得られる．

これを (20.7) に代入すれば，問題は Lagrange 未定係数に対応する双対変数 α_i で書けて，

$$\text{制約条件}\quad \alpha_i\geq 0,\quad \sum\alpha_i y_i=0 \tag{20.11}$$

の下で 2 次関数

$$\max_{\{\alpha_i\}}\sum\alpha_i-\frac{1}{2}\sum\alpha_i\alpha_j y_i y_j\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j \tag{20.12}$$

を最大化する問題に帰着する．ここで，Lagrange 未定係数の意味から，サポートベクトル以外のパターン $\boldsymbol{x}_i$ は制約条件に引っかかることはなく，そのような $\boldsymbol{x}_i$ に対しては $\alpha_i=0$ となることがわかる．上記の 2 次関数の制約付き最適化問題を解くアルゴリズムはよく知られている．

こうして $\boldsymbol{\alpha}$ が求まれば，識別関数は (20.10) より

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\sum\alpha_i y_i\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}+b \tag{20.13}$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{x}_i$ がサポートベクトルでなければ α_i は 0 だから，識別関数はサポートベクトルだけを用いて書けることがわかる．

ここでは，2 分割識別で線形分離可能な場合を扱った．しかし，数理計画法

でよく知られているスラック変数 ξ_i を導入すれば，ソフトマージンを定義して線形分離可能でない場合にもこの手法を適用することができる．また，2 分割ではなくて，出力 y をアナログ値にして，線形回帰の問題とすることもできる．これらはここでは述べないが，その幾何学は同じである．

20.2 高次元への埋め込み

線形では，識別能力が限られているから，$\boldsymbol{x}$ を (20.1) により高次元に写像して $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ とし，高次元の空間で線形識別を行う．易しい例で見るとなぜうまくいくかが良くわかる．2 次元のパターン $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ を

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_1^2 + x_2^2 \tag{20.14}$$

により 3 次元に埋め込むと，もとの $\boldsymbol{x}$ の 2 次元平面は，$\boldsymbol{R}^3$ では 2 次曲面（放物面）になる（図 20.3）．ここで識別関数

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3 + b \tag{20.15}$$

を考えれば，識別の境界面はこの曲面 (20.15) を平面で切るものであり，切り口は $\boldsymbol{R}^2$ では曲線になる．このときの識別面（この場合は識別線）は楕円であるから多様な識別関数が構成できる．例えば，$x_1^2 + x_2^2 - c$ の正負に応じて $\boldsymbol{x}$ を識別する問題が難なく解ける．

$\boldsymbol{z}$ での線形識別問題は，関数 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ を用いて

$$f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + b = \sum \alpha_i y_i \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + b \tag{20.16}$$

のように書ける．これはデータ $\boldsymbol{x}$ を次元を上げて非線形に写像して $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ とし，その上で線形識別するもので，パーセプトロンの能力を上げる手法としてよく知られている．多層パーセプトロンはその一つである．多層パーセプトロンの場合，非線形関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ もニューロン素子で実現し，これも学習で決めるように話が進んだ．しかし多層パーセプトロンでは極小解の問題があり，さらにパラメータ空間が特異点を含むなどの種々の問題がある．これについては後の回で述べる．非線形関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ を固定すれば，識別関数は $\boldsymbol{w}$ については線形であり，このような問題がないので常に解が求まる．ただ，次元 N を大きく上げないとよい性能が得られないが，次元を上げると計算量が増えて手に負

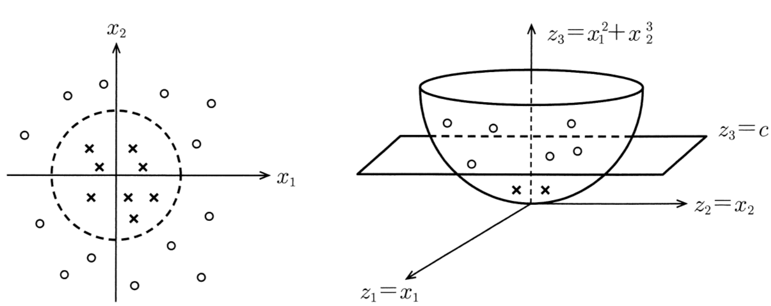


図 20.3　高次元での線形識別関数は低次元では曲面になる．

えなくなる．まして，N を無限大にするなど論外と考えられた．これを解決したのがカーネルトリックであった[4,7,8]．

20.3 カーネル法

式 (20.16) を見るとわかるように，識別関数 $f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{z}$ の空間では，2 つのパターン $\boldsymbol{z}_i$ と $\boldsymbol{z}$ の内積，すなわち $\boldsymbol{x}$ の言葉では $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_i)$ と $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ の内積で書ける．しかし，N が大きいと $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ を求めること自体が大変である．ここで $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ に対して，それを埋め込んだ高次元空間での内積を

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}') = \sum \varphi_i(\boldsymbol{x})\varphi_i(\boldsymbol{x}') \tag{20.17}$$

と置く．これは，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ の 2 つのベクトルの対称関数である．しかも，任意の係数列 $c_1,\cdots,c_N$ に対して，非負性

$$\sum c_i c_j K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) \geq 0 \tag{20.18}$$

を満たしている．行列でいえば，正定値（正確には非負）の行列に対応する．$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ は無限次元の行列のようなもので，通常の行列 $K(i,j)$ に対応して，インデックス i,j の代わりにベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'$ が行と列を表すと考えればよい．

対称行列の場合，その固有値と固有ベクトルを考えることができる．K は無限次元であるから，和が積分になって

$$\int K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\,\psi_i(\boldsymbol{x}')\,d\boldsymbol{x}' = \lambda_i\psi_i(\boldsymbol{x}) \tag{20.19}$$

という固有方程式が現れる．固有値が λ_i，固有ベクトル（固有関数）が $\psi_i(\boldsymbol{x})$ である．これを用いると $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ は

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \sum \lambda_i\psi_i(\boldsymbol{x})\psi_i(\boldsymbol{x}') \tag{20.20}$$

のように展開できる．この式を (20.17) と比べてみよう．

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\psi_i(\boldsymbol{x}) \tag{20.21}$$

とおけば，(20.20) は (20.17) になる．だから元の非線形関数 $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ は，カーネル関数 K の固有関数 $\psi_i(\boldsymbol{x})$ を固有値の平方根で割ったものに等しい．

$\boldsymbol{R}^N$ での最適な線形識別関数は，重み

$$\boldsymbol{w} = \sum \alpha_i y_i \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_i) \tag{20.22}$$

を用いて (20.16) 式のように書ける．(20.17) を用いれば，これはカーネルを用いて

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) = \sum \alpha_i y_i K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}) + b \tag{20.23}$$

と表せば良い．だから，$\boldsymbol{R}^N$ での線形識別関数を計算するのに，写像 $\boldsymbol{\varphi}$ を用いて高次元（無限次元かもしれない）の $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ の計算をしなくて良い．これがカーネルトリックと呼ばれるもので，無限次元の空間に写像する場合にも，具体的な写像 $\boldsymbol{\varphi}$ は用いずに，K だけで計算ができる．これなら N が無限大でもよい．何とも便利なものである．

それならば，具体的な $\boldsymbol{\varphi}$ の形を示さずに，カーネル関数 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ から出発してよい．K が正定値のカーネル関数となる条件は，マーサー条件と呼ばれて

いる．このとき，K の固有関数を固有値の平方根で割った関数を，埋め込み関数に用いた写像を用いるわけだが，特にそれが何であるかを言う必要もない．

カーネルとしてよく用いられるのは，σ を定数とするガウスカーネル

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}{\sigma^2}\right\}, \tag{20.24}$$

p 次の多項式カーネル

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' + 1)^p \tag{20.25}$$

などである．ガウスカーネルのときは，固有関数は

$$\psi_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{x}) = \exp\{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}\} \tag{20.26}$$

の形になる．インデックスとして $\boldsymbol{\omega}$ を用いた．これはフーリエ展開の関数系に相当している．多項式カーネルは有限次元で，$\boldsymbol{x}$ のある次数までの多項式 $\psi_i(\boldsymbol{x})$ を固有関数系としている．

カーネル法は，データ $\boldsymbol{x}$ が数値で表される $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルの場合に限らず，遺伝子情報のような記号列のときにも使えるから，大変便利であり，これにより応用がバイオインフォーマティックスなどの分野に一挙に広がった．

20.4 埋め込みが生み出すリーマン計量

埋め込みによって，$\boldsymbol{R}^n$ は高次元空間 $\boldsymbol{R}^N$ の曲面になる．このとき，元の空間の 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ は，埋め込んだ先では 2 点 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}')$ になるから，距離が変わってくる．そこで，微小な 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ の間の距離がどう変わるかを計算してみよう．$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$ の間のユークリッド距離の二乗は

$$ds^2 = |\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})|^2 = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) dx_i dx_j \tag{20.27}$$

である．したがって，高次元空間への埋め込みがもたらすリーマン距離は計量行列 g_{ij} を用いて

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\right) \tag{20.28}$$

と書ける．これは，カーネル関数 K を用いれば

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j'} K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}} \tag{20.29}$$

である．

$$dV(\boldsymbol{x}) = \sqrt{|g_{ij}(\boldsymbol{x})|}dx_1 \cdots dx_n \tag{20.30}$$

は，計量 g_{ij} を持つリーマン空間の体積要素，すなわち，$\boldsymbol{x}$ 点から各成分が dx_i だけ増えてた点の作る微小立方体の体積を表す．これを見ると，各点での体積は $\sqrt{|g_{ij}(\boldsymbol{x})|}$ 倍に拡大されて，高次元の空間に埋め込まれていることが分かる．埋め込まれた $\boldsymbol{R}^N$ は曲がっているから，計量は一般にリーマン的である．

サポートベクトル機械で線形識別の性能が上がったのは，$\boldsymbol{R}^n$ を非線形に変形して拡大して高次元空間に埋め込んだからであった．それでは，識別面の境界付近にあるサポートベクトルの近傍をさらに拡大するように，関数 $\boldsymbol{\varphi}$ を変え

てみたらもっと性能が良くなるかもしれない．

文献 9, 10) では，サポートベクトル $\boldsymbol{x}_i^*$ を求めて，その付近で体積が

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum e^{-\kappa_i|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i^*|} \tag{20.31}$$

倍に拡大するように，埋め込み関数を変えることを試みた．ここに $\sigma(\boldsymbol{x})$ は各点 $\boldsymbol{x}$ 毎の拡大の係数である．後に文献 11) では，サポートベクトル自体を使うのではなくて，識別関数

$$f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum \alpha_i y_i K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}) + b \tag{20.32}$$

の値を使って拡大を考えればよいことを示した．なるほど，識別の境界面では $f = 0$ であり，境界面付近をとくに拡大すればよいのだから，拡大率を

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \exp\left[-\kappa \{f(\boldsymbol{x})\}^2\right] \tag{20.33}$$

で定めるのが自然である．κ は拡大の度合を表す定数である．

拡大を実行するには埋め込み関数 $\boldsymbol{\varphi}$ を変えればよいのだが，このままではやりにくい．そこで，カーネル関数の拡大を考える．各点での拡大率 $\sigma(\boldsymbol{x})$ を用いて，カーネル $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を，

$$\tilde{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{x}')K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \tag{20.34}$$

に変えてみよう．これをカーネルの共形変換と呼ぶ．このとき，リーマン計量は g_{ij} から，(20.29) を用いて計算すれば

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij}(\boldsymbol{x}) &= \sigma^2(x)g_{ij}(\boldsymbol{x}) + \sigma_i(\boldsymbol{x})\sigma_j(\boldsymbol{x})K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \\ &\quad + \sigma(\boldsymbol{x})\{\sigma_i(\boldsymbol{x})K_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \sigma_j(\boldsymbol{x}')K_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\}\end{aligned} \tag{20.35}$$

に変わることが分かる．ただし，$\sigma_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma(\boldsymbol{x})$, $K_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}}$．とくにガウスカーネルのように

$$K_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \tag{20.36}$$

が成立していれば

$$\tilde{g}_{ij}(\boldsymbol{x}) = \{\sigma(\boldsymbol{x})\}^2 g_{ij}(\boldsymbol{x}) + \sigma_i(\boldsymbol{x})\sigma_j(\boldsymbol{x}) \tag{20.37}$$

となる．

いくつかの例題で，サポートベクトルをカーネル $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を用いて計算し，そのうえで (20.33) の識別関数 f を用いて共形変換したカーネルを用いて，問題を再計算する．この結果識別率が数パーセントから十数パーセント良くなることが確かめられている[9~11]．

20.5 自然勾配法

ここで，自然勾配またはリーマン勾配について，述べておこう．リーマン空間上に，関数 $L(\boldsymbol{\theta})$ があったとしよう．この関数の最小点は，勾配 $\nabla L(\boldsymbol{\theta})$ が 0，すなわち

$$\partial_i L(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\right) \tag{20.38}$$

を満たす．最小点を探索する一番素朴な方法は，現在の候補の値 $\boldsymbol{\theta}_t$ から，関

数値が下がる方向へ，$\boldsymbol{\theta}$ を少しずつ変えていくことである．繰り返し演算で書くならば，ε を小さい定数として

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t - \varepsilon \boldsymbol{a}, \tag{20.39}$$

ただし，

$$L(\boldsymbol{\theta}_t - \varepsilon \boldsymbol{a}) < L(\boldsymbol{\theta}_t) \tag{20.40}$$

となる方向 $\boldsymbol{a}$ を探す．関数値が下がる方向として，勾配

$$\boldsymbol{a} = \nabla L(\boldsymbol{\theta}) \tag{20.41}$$

を用いれば，ε が小さければテイラー展開して

$$L(\boldsymbol{\theta}_t - \varepsilon \boldsymbol{a}) = L(\boldsymbol{\theta}_t) - \varepsilon \nabla L \cdot \nabla L < L(\boldsymbol{\theta}_t). \tag{20.42}$$

これはときに最急降下法の名前で呼ばれるが，それには注意が必要である．最急降下法は，関数 L の最も急激に減少する方向に $\boldsymbol{\theta}$ を動かすべきである．最急降下方向とは，現在の $\boldsymbol{\theta}$ から，$\boldsymbol{\theta} - \varepsilon \boldsymbol{a}$ へ動かすときに，$\boldsymbol{a}$ の大きさは一定として，どの方向 $\boldsymbol{a}$ が最急かを比較して求める．このとき，減少が一番急な方向は，Lagrange 未定係数 λ を用いて，

$$L(\boldsymbol{\theta} - \varepsilon \boldsymbol{a}) - \lambda \|\boldsymbol{a}\|^2 \approx -\nabla L \cdot \boldsymbol{a} - \lambda \|\boldsymbol{a}\|^2 \tag{20.43}$$

の極値を与える $\boldsymbol{a}$ である．リーマン空間の場合，計量テンソル $G = (g_{ij})$ を用いて，$\boldsymbol{a}$ の長さの 2 乗が

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \sum g_{ij} a^i a^j \tag{20.44}$$

と書ける．これより最急降下の方向が

$$\boldsymbol{a} = G^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \nabla L(\boldsymbol{\theta}) \tag{20.45}$$

であることが分かる．$\tilde{\nabla} L(\boldsymbol{\theta}) = G^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \nabla L(\boldsymbol{\theta})$ をリーマン勾配または自然勾配と呼ぶ[12)]．

ユークリッド空間で正規直交座標系を用いた場合，計量行列 G は単位行列に等しい．すなわち，この場合に限り，最急降下方向は，通常の勾配 $\boldsymbol{a} = \nabla L(\boldsymbol{\theta})$ で与えられる．しかしユークリッド空間においてさえ一般の場合はこれとは違うことに注意してほしい．

少し専門的にいえば，勾配は，添え字が下に付くベクトルで共変ベクトルと呼ばれる．

$$a_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i} L(\boldsymbol{\theta}) \tag{20.46}$$

これに対して，方向を表すベクトルは反変ベクトルと呼ばれ，添え字が上に付くベクトルである．反変ベクトルと共変ベクトルの間の変換が計量行列を用いて

$$a^i = \sum g^{ij} a_j \tag{20.47}$$

と書ける．ユークリッド空間で正規直交系を用いた場合，両者は等しいから，その違いを気にしないことも多い．

オンライン学習の問題では，観測できる確率変数 $\boldsymbol{x}$ を含む関数 $l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ があり，最小化したいのはその期待値 $L(\boldsymbol{\theta}) = E[l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})]$ である．このときは，確率変数が一つ観測されるごとに，パラメータを

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t - \varepsilon_t \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{\theta}_t) \tag{20.48}$$

に従って変えていく．これは，確率降下法と呼ばれ，古くから知られている．

この場合

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = G^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \nabla l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) \tag{20.49}$$

を用いるのが自然勾配学習法である．確率分布 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ のパラメータを推定する場合は，最小化すべき $l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = -\log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ は対数尤度を負にしたものである．データ $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_T$ が観測された場合，バッチ処理ではデータをすべて用い，

$$L(\boldsymbol{\theta}) = -\sum l(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{\theta}) \tag{20.50}$$

を最小化する．このときに得られるのは最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ であり，T が大きい漸近論では，誤差が Cremer–Rao 不等式を漸近的に等号

$$E\left[\left(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\left(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T\right)\right] = \frac{1}{T} G^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \tag{20.51}$$

で満たす Fisher 有効なものであった．しかしオンライン学習では，データ $\boldsymbol{x}_t$ は一度使ったら捨ててしまう．それ故，一般のオンライン学習による推定量は Fisher 有効にはならず，情報の損失が生ずる．

しかし，自然勾配学習法はこの心配がない[12]．

定理 20.1 学習係数を $\varepsilon_t = 1/t$ にとる自然勾配学習法は，Fisher 有効である．

オンライン学習では，ε_t を確率近似法の条件

$$\sum_t \varepsilon_t > 0, \quad \sum \varepsilon_t^2 < \infty \tag{20.52}$$

を満たすようにとると，$\boldsymbol{\theta}_t$ が最適点収束することが保証される．しかし，最適点は変動する場合もあるから，通常は ε_t を小さな定数に取る．また，最適点が動いた場合には，ε_t を大きく取り，最適点に近づいたときには小さくする，「学習法の学習」という戦略がある．これには，自然勾配学習に加えて

$$\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t \exp\left\{\alpha\left[\beta l\left(\boldsymbol{x}_t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_t\right) - \varepsilon_t\right]\right\} \tag{20.53}$$

とする学習法が提案されており，その特性が解析されている[12]．

終わりの一言

信号 $\boldsymbol{x}$ を高次元の空間に非線形に写像し，ここで線形識別を実行するというアイデアは，ロシアのグループに由来する[5]．彼らは埋め込み関数として記号 Φ を用いたため，これは Φ 関数法として良く知られていた．ただ，計算上の都合から，あまり高次の空間には埋め込めない．このため，埋め込み関数を固定するのではなくて可変にし，これをも学習で求めるという考えが出た．多層パーセプトロンはまさにこれを実行している．中間層のニューロンが埋め込み関数 $\varphi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$ を計算する．ただし，$\boldsymbol{v}_i$ は可変なパラメータである．これを用いて，最後の出力層のニューロンが最終の答である識別関数

$$y = \sum w_i \varphi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i) \tag{20.54}$$

を計算するのが多層パーセプトロンである．

ただ，この場合識別関数はパラメータ $\boldsymbol{v}_i$ を非線形に含むため，非線形関数の最適化になり，極小解や特異点の存在など，困難も含むことになる．

Vapnik はこうしたロシア学派で活躍した人物である．彼は，確率分布をデータ推定するときの真の分布への収束が一様でないことに着目し，識別機械の族の能力を表す VC（Vapnik–Cherbonenkis）次元というものを導入して，学習識別の理論を築いた．当時西側の科学とは隔絶していたロシアでは，学習識別や制御に関する独自の理論体系の建設が進んでいた．私の学習機械に関する論文もロシアで紹介され，西側では日本だけでこのような研究がおこなわれていると評価された．後に Tsypkin の学習機械に関する本が英訳されて，さらにその日本語訳が現れ，ここに甘利の理論なるものが紹介されていて，驚いたものである．

それはさておき，パーセプトロンなどの識別機械の VC 次元の計算などの議論は進んだが，多くの識別機械の族では VC 次元は単にパラメータの数の 2 倍になって，面白くない．そこで Vapnik が考えたのが，パーセプトロンの重みの大きさに制約を加えるなどの工夫である．これが，サポートベクトル機械へと拡大し，さらにカーネルトリックが現れて，一気にブレークした．

いまや，これは学習機械の標準的な手法となり，一世を風靡している．しかし，肝心のカーネル関数をどう設計するか，この機械における訓練誤差と汎化誤差の関係など，まだ未解決の問題も多い．共形変換は，与えられた識別機械の改良を示すものではあるが，設計の一般論にはほど遠い．幾何学的な理論が待たれる．

参考文献

1) C.M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer 2006.
2) 麻生秀樹，津田宏治，村田昇，『パターン認識と学習の統計学』，岩波書店，2003.
3) 村田昇，『情報理論の基礎』，サイエンス社，2005（新版：2008）.
4) 赤穂昭太郎，『カーネル多変量解析—非線形データ解析の新しい展開』，岩波書店，2008.
5) M. Aizerman, E. Braverman, and L. Rozonoer, "Theoretical foundations of the potential function method in pattern recognition learning". *Automation and Remote Control* **25**: 821–837, 1964.
6) C. Cortes and V. Vapnik, Support vector networks. *Machine learning*, **20**, 273–297, 1995.
7) B. Schölkopf, *Support Vector Learning*. Oldenbourg, 1997.
8) J. Shawe-Taylor and N. Cristianini. *Kernel Methods for Pattern Analysis*. Cambridge University Press, 2004.
9) S. Amari and S. Wu, Improving support vector machine classifiers by modifying kernel functions, *Neural Networks*, **12**, pp.783–789, 1999.
10) S. Wu and S. Amari, Conformal Transformation of Kernel Functions: A Data-Dependent Way to Improve Support Vector Machine Classifiers, *Neural Processing Letters*, **15**, pp.59–67, 2002.
11) P. Williams, S. Wu and J. Feng, Two scaling methods to improve performance of the support vector machine. In Support Vector Machines: Theory and Applications, Ed., L. Wang, 205–218, Springer, 2005.
12) S. Amari, Natural Gradient Works Efficiently in Learning, *Neural Computation*, Vol.**10**, No.2, pp.251–276, 1998.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

特　集（2013年3月号予告）

光と物理学
自然を目で感じる

本体952円

特　集（2013年1月号）

表現論の世界
多彩な数理が交叉する世界に迫る

本体952円

編集後記

今回の特集ではロシアの方にもご執筆いただきました．かねてから「可積分系」分野の記事では参考文献などでロシアの方のお名前を拝見することが多かったのですが，本特集のサブタイトルの“可積分系から幾何学まで”の分野での層の厚さをあらためて感じます（実際に歴史的にも可積分系分野は強いようです）．

翻訳前の原稿を見ると数式部分は日本と同じでやはり数式の表記は万国共通なのだなと感じました．

数学や物理を通じて，外国語（文化）を学ぶ，ということもできるのかもしれません．読者の皆さんも挑戦してみてはいかがでしょうか．　(R)

＊　　＊

本号は海外で活躍されている先生方の記事が多く掲載されています．国外の研究事情はどうなっているのかを知るきっかけとなれば幸いです．英語が苦手な私は外国語を短期間で日本語訳にした先生方をすごいと思うとともに，数学は世界共通言語であるようにも感じました．

学生時代，私も卒業研究のため英語で書かれた物理の論文を読みました．入試などで読んだ英文よりも論文のほうがスムーズに読めるような気がして，科学には言葉の壁を越える力があるのかもしれないと，今思うと少し生意気ですが，当時もそんなことを考えました．　(T)

数　理　科　学　2月号

2013年2月1日発行

数理科学編集部　　発行人 木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁